Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Existencia de soluciones para una ecuación semi lineal con el *p*-Laplaciano vía teoría de Morse

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Pedro Angel Becerra Perez

ASESOR

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2020

Referencia bibliográfica

Becerra, P. (2020). *Existencia de soluciones para una ecuación semi lineal con el p-Laplaciano vía teoría de Morse*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Información complementaria

Código ORCID del asesor (es)	**0000-0002-8941-4394**
Autor DNI (Obligatorio) Pasaporte /carnet de extranjería (sólo extranjeros)	**25748466**
Asesor DNI (Obligatorio)	**06445518**
Código ORCID del autor	0000-0002-3124-752X
Grupo de investigación	EDOACBI
Financiamiento	------------------------------
Ubicación geográfica donde se desarrolló la Investigación (incluirse localidades y/o coordenadas geográficas).	Perú, Ciudad Universitaria - UNMSM, Av.República de Venezuela 3400, Cercado de Lima. 12°03'36.2"S 77°04'55.3"W Perú Lima SMP Mercedes de Oquendo
Disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01
Año o rango de años que la investigación abarcó.	2014-2019

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 3:15 horas del día jueves trece de febrero del dos mil veinte, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis Presidido por el Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre e integrado por los siguientes miembros: Mg. Willy David Barahona Martínez (Jurado Informante); Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas (Jurado Evaluador Externo) y, el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA UNA ECUACIÓN SEMI LINEAL CON EL P-LAPLACIANO, VÍA TEORÍA DE MORSE» presentada por el Bachiller Pedro Angel Becerra Pérez para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Pedro Angel Becerra Pérez respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Pedro Angel Becerra Pérez aprobado con el calificativo de Excelente (19)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Pedro Angel Becerra Pérez.

Siendo las 16:15 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Miembro

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Presidente

Mg. Willy David Barashona Martínez
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

Información complementaria

Código ORCID del asesor (es)	**0000-0002-8941-4394**
Autor DNI (Obligatorio) Pasaporte /carnet de extranjería (sólo extranjeros)	**25748466**
Asesor DNI (Obligatorio)	**06445518**
Código ORCID del autor	0000-0002-3124-752X
Grupo de investigación	EDOACBI
Financiamiento	-------------------------------
Ubicación geográfica donde se desarrolló la Investigación (incluirse localidades y/o coordenadas geográficas).	Perú, Ciudad Universitaria - UNMSM, Av.República de Venezuela 3400, Cercado de Lima. 12°03'36.2"S 77°04'55.3"W Perú Lima SMP Mercedes de Oquendo
Disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01
Año o rango de años que la investigación abarcó.	2014-2019

Existencia De Soluciones Para Una Ecuacion Semilineal en el p-Laplaciano

Pedro Angel Becerra Perez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado Academico de Magister en Matematica Pura.

Aprobado por:

....
(Nombre Docente)
Presidente

....
(Nombre Docente)
Miembro

....
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

LIMA - PERÚ
Diciembre - 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

PEDRO ANGEL BECERRA PEREZ

Exitencia de soluciones para una ecuación semilineal con p- laplaciano via teoria de Morse (Lima) 2019.
xii, xx pp, 29.7 cm, (UNMSM, Magister,Matemática Pura 2019).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática Pura UNMSM/FCM II. Grado (Serie).

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a Zoila, Paola y Arturo

Agradecimientos

Agradezco las sugerencias y comentarios del Dr. E. Cabanillas y el Dr. P. Contreras

RESUMEN

Existencia de soluciones para una ecuación semilineal con el p-Laplaciano via teoria de Morse

Pedro Ángel Becerra Pérez

Diciembre - 2019

Orientador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Grado obtenido Magister en Matemática Pura

En este trabajo realizamos un...

Palabras clave: Teoria de Morse
Ecuación Semilineal

ABSTRACT

Existence of Solutions to a Superlineal p-Laplacian view theory of Morse

Pedro Ángel Becerra Pérez

December - 2019

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Obtained Title: Magister en Matemática Pura

En este trabajo realizamos un...

Keywords: Theory of Morse
Equation Semilinear

Índice general

Introducción

Diversos fenómenos en Ciencias e Ingeniería son modelados por medio de ecuaciones diferenciales y muchos de ellos admites formulación variacional; esto es; podemos determinar las soluciones de la ecuación diferencial hallando los puntos críticos de un funcional de energía, casi siempre expresado mediante integrales definido en un espacio adecuado de funciones. Los métodos variacionales (dados por ejemplo por minimización directa, Teorema de Weirstrass Generalizado, el teorema del Paso a la montaña, etc) que permiten encontrar los puntos críticos de funcionales diferenciales con cierta "facilidad". Una condición usual al implementar estos metodos es la denominada (AR), condición de Ambrosetti-Rabinowitz, que significa que la fuente no lineal de la ecuación diferencial es superlineal en el infinito.

Como es conocido en el cálculo variacional moderno el papel que desempeña (AR) es asegurar la acotación de la sucesión de Palis-Smale del funcional de energía asociado a la ecuación diferencial. Esto es de vital importancia para la aplicación de los métodos variacionales. Desafortunadamente existen muchos modelos en que la fuente no lineal no es superlineal en el infinito por lo que es necesario implementar otras técnicas que prescindan de la condición (AR).

Una potente herramienta variacional que permite realizar esto es la Teoría de Morse realizada por el matemático norteamericano Harold Calvin Marston Morse, justamente después de la primera guerra mundial. Esta teoría permite describir el comportamiento del funcional de energía (continuamente difereniable) definido sobre un espacio funcioanl (de Banach) cerca de uno de sus puntos críticos aislados, por medio de sus grupos críticos, que son grupos de Homología de un cierto espacio topológico. Mas precisamente asociamos a cada punto crítico del funcional de energía Φ una sucesión de grupos $C_q(\Phi, U), q \in \mathbb{N}$ llamados grupos críticos de Φ en U, e investigamos la relación entre ellos la condición $(C_q(\Phi, 0) \neq C_q(\Phi, +\infty)$, para algún $n \in \mathbb{N})$ lo que implicará la existencia de una solución no trivial a la ecuación diferencial.
El objetivo del presente trabajo es presentar una exposición comprensible del paper en el que se prueba la existencia y multiplicidad de las soluciones del problema:

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta_p u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

donde Ω es un abierto suave y acotado de $\mathbb{R}^N$; Δ_p es el operador p-laplaciano y f es una fuente no lineal sujeta a determinadas condiciones por ejemplo como la dada en los trabajos de Kanishka Perera con el trabajo de Grupos críticos de puntos críticos producidos por enlazamiento local con aplicaciones y Shibo Liu con el trabajo de Existencia de Soluciones de una ecuación semilineal con el p-Laplaciano. La ventaja de este último trabajo es generalizar la ecuación semilineal al p-Laplaciano.

En el capítulo 2, introducimos conceptos preliminares del cálculo variacional y la teoria de Morse.

En el capítulo 3, probamos el resultado principal de este trabajo, esto es mediante la aplicación de la Teoría de Morse, muestra la existencia de las soluciones no triviales del problema (1). Adicionalmente, imponiendo determinadas condiciones de monotonía en f, probamos la unicidad de las soluciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones diferenciables

Definición 1.1. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, a \in \mathring{A}$, diremos que f es **deferenciable** o **derivable** según **Frechet** si admite derivadas parciales respecto a cualquier indice en a y satisface la siguiente condición.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - A(h)\|}{\|h\|} = 0$$

donde A es un operador lineal continuo.

Ejemplo:
Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ es una aplicación lineal entonces la función $f_A : H \to \mathbb{R}$ definida por $f_A(x) = \langle A(x), x \rangle$ es Frechet diferenciable.

Definición 1.2. Sea U un abierto de un espacio de Banach X y una función $\varphi : U \to \mathbb{R}$, diremos que φ es **Gáteaux diferenciable** en $u \in X$ si existe $f \in X^*$ tal que para todo $h \in X$ se tiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + th) - \varphi(u)}{t} = \langle f, h \rangle.$$

Si este limite existe, es único y denotaremos por $\varphi'_G(u) = f$ que llamaremos la **derivada de Gáteaux de $\boldsymbol{\varphi}$**.

La función φ tiene derivada de Frechet $f \in X^*$ en u si:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle}{\|h\|} = 0, \ \ \forall u \in X$$

En este caso denotaremos $\varphi' = F$, que llamaremos derivada de Frechet φ o simplemente derivada de φ

La función $\varphi \in C^1(U, R)$ si φ posee derivada de Frechet φ' en U y esta fuera continua en U.

Observación 1. Una función Frechet diferenciable es Gáteaux diferenciable. Una función Frechet diferenciable en u es siempre continuo en u pero no necesariamente continua en u.

Por ejemplo la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ para $y \neq 0, g(x, 0) = 0$ no es continuo en el origen pues el conjunto $S = \{(x, y)|y = x^2\}$ no es continuo. Por otro lado $\varphi'_G(0, 0) = 0$.

Lema 1.1. Suponga que $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ es continua en el segmento $[a, b] \subset U$, Gáteaux diferenciable y continua en $(a, b) \subset U$, entonces

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_0^1 \langle \varphi'_G(a + t(b - a)), b - a\rangle dt.$$

Demostración. Considere una función real $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \varphi(a+t(b-a))$. Entonces podemos aplicar el T.F.C. a la función $g'(t)$. Asimismo

$$\varphi(b) - \varphi(a) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 (\langle \varphi'_G(a + t(b - a), b - a\rangle)dt$$

□

Proposición 1.1. Si φ fuera Gáteaux diferenciable en U y φ'_G fuera continua en $u_0 \in U$ entonces φ es Frechet diferenciable en u_0 y $\varphi'(u_0) = \varphi'_G(u_0)$

Demostración. Definimos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \varphi(u_0 + th) - \varphi(u_0) - t\langle \varphi'_G(u_0), h\rangle$$

Entonces $f(0) = 0$ y

$$f'(t) = \langle \varphi'_G(u_0 + th) - \varphi'_G(u_0), h\rangle$$

Aplicando la desigualdad del valor medio, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\varphi(u_0 + h) - \varphi(u_0) - \langle \varphi'_G(u_0), h\rangle\| &= \|f(1) - f(0)\| \\ &\leq \|h\| \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'_G(u_0 + th) - \varphi'_G(u_0)\| \end{aligned}$$

La continuidad de φ'_G garantiza entonces que φ es Frechet diferenciable en u_0 y $\varphi'(u_0) = \varphi'_G(u_0)$. Supongamos que H sea un espacio de Hilbert y que $\varphi : U \subset H \to \mathbb{R}$ sea (Frechet) diferenciable, entonces $\varphi'(u) \in H^*$ para todo $u \in U$. Esto explica del teorema de representación de Riez que $\varphi'(u) \in H^*$ puede ser identificado como un elemento de H. □

Definición 1.3. Sea $\varphi : U \subset H \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. El **gradiente de** φ en u, denotado por $\nabla\varphi(u)$ es un elemento de H definido por:

$$\langle \nabla\varphi(u), h\rangle = \langle \varphi'(u), h\rangle$$

Un operador $F : U \subset H \to H$ es un **operador potencial** si existe una función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\varphi$

1.2. Algunos resultados del Análisis Funcional

Ahora recordamos resultados básicos del Análisis Funcional y de la teoría de integración demostraremos por dx la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ en los cuales dx esta bien definida son denominados conjuntos medibles.

La funciones f tales que, para cada $a \in \mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) > a\}$ es un conjunto medible, son denominados funciones medibles. La integral de Lebesgue, a su vez es definida para funciones medibles. Denotaremos por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto) acotado de $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ diremos que dos funciones son **equivalentes** en Ω con respecto a la medida de Lebesgue; si ellas fueran iguales en casi todo punto (c.t.p), esto es, $v \equiv u$, si v y u son diferentes apenas en un subconjunto de Ω con medida nula.

Definición 1.5. A la clase de equivalencia determinada por v consiste de todas las funciones W que son equivalentes a v. Con base en las clases de equivalencia, definimos los espcios L^p.

Definición 1.6. Denotamos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y sea $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $L^p(\Omega)$ por:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \ \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

en que representamos simplemente por f a la clase de equivalencia determinada por f. La función $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}$$

define una morma en el espacio $L^p(\Omega)$.

Definición 1.7. Se define

$$L^\infty = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \exists C \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq C, \ c.t.p \text{ en } \Omega \}$$

y se denota la norma en este espacio por:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf} \{ C : |f(x)| \leq C, \ c.t.p. \text{ en } \Omega \}$$

se puede mostrar que los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach con las normas definidas encima. Algunas veces escribiremos L^p en vez de $L^p(\Omega)$ y $\displaystyle\int_\Omega f$ en vez de $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Holder)**.** Sea Ω C $\mathbb{R}^n$ un dominio cualquiera y $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, supongamos que $f \in L^p(\Omega)$ y que $g \in L^q(\Omega)$ entonces $f.g \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \|f(x).g(x)\|\, dx \leq \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega \|g(x)\|^q\, dx\right)^{1/q}$$

Teorema 1.2. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en L^p y $f \in L^p$ tal que

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ c.t.p. en Ω

ii) $\|f_{n_k}(x)\| \leq h(x)$ c.t.p. en Ω para todo k, en que $h \in L^p$

Proposición 1.2 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ una sucesión tal que $f_n \to f$ c.t.p. Ω cuando $n \to \infty$. Supongamos que existe una función g $\in L^1(\Omega)$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ vale la desigualdad:

$$\|f_n(x)\| \leq g(x) \text{ c.t.p. de } \Omega,$$

entonces $f \in L^1(\Omega)$ y también

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L'(\Omega)} = 0 \text{ y } \int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$$

Proposición 1.3 (Desigualdad de Young)**.** Dados los números $a, b \in \mathbb{R}^+$ y dados $p, q \in \mathbb{R}$ con $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vale la desigualdad:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ademas de eso, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $C = C(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon p)}{q}^{-q/p}$ tal que $ab \leq \varepsilon a^p + C b^q$

Definición 1.8 (Convergencia débil)**.** Sea X un espacio de Banach, X^* el dual de X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ en el **sentido débil** cuando $n \to \infty$, si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in X^*$. Denotamos a la convergencia débil por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema 1.3. Sea X un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ el cual converge débilmente en X.

Proposición 1.4 (Propiedad de la convergencia débil)**.** Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio de Banach X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces:

i) La convergencia fuerte $u_n \to u$ implica la convergencia débil $u_n \rightharpoonup u$.

ii) Si $\dim(X) < \infty$ entonces la convergencia débil $u_n \rightharpoonup u$ es equivalente a la convergencia fuerte $u_n \to u$.

iii) Si $u_n \rightharpoonup u$. entonces $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

iv) Sea X local y uniforme convexo. Si $u_n \rightharpoonup u$ y $\|u_n\| \to \|u\|$ entonces $u_n \to u$.

v) Si cada subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge debilmente tiene un mismo límite u, entonces $u_n \rightharpoonup u$

Observación 2. En el espacio infinito dimensional ℓ^p existen suesiones que convergen débilmente a cero pero no convergen fuertemente.

Teorema 1.4 (Convergencia débil)**.** Sea X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal compacto. Supongamos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X sea debilmente convergente, digamos $x_n \rightharpoonup x$. Entonces Tx_n es fuertemente convergente en Tx y tiene límite $y = Tx$.

Definición 1.9. Sea X un espacio topológico. Denotamos la recta real extendida por $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Se dice que una función $\Phi : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente (s.c.i.) si $\Phi^{-1}((a, +\infty))$ es abierto en $X, \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$. O equivalentemente f es s.c.i si para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$ con $f(x) > a$ existe una vecindad U de x tal que $f(s) > a, \forall s \in U$. Si X fuera un espacio métrico entonces $\Phi : X \to \mathbb{R}$ es s.c.i. si y solo si $\Phi(u) \leq \liminf \Phi(u_n)$ para cualquier $u \in X$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $u_n \to u$.

Teorema 1.5. Sea X un espacio Topológico compacto y sea $\Phi : X \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. entonces Φ es acotado inferiormente y existe $u_0 \in X$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{u\in X} \Phi(u)$$

Definición 1.10. Sea X un espacio topológico. Se dice que $\Phi : X \to \mathbb{R}$ es **debilmente semicontinua inferiormente** d.s.c.i. si Φ es s.c.i. considerando X como una topológia débil.

Observación 3. Siendo X un espacio normado, podemos definir una inyección canónica J dada de la siguiente forma:

$$J : X \to X^{**} \text{ y } Jx : X^* \to \mathbb{R}$$

tal que $\langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle$ donde X^{**} es el bidual, esto es, el dual de X^*. Entonces J asimismo definida es lineal y también es una isometría esto es $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$.

Definición 1.11. Sea X un espacio de Banach reflexivo. Diremos que una función $\phi : X \to \mathbb{R}$ es **coerciva**, si $\phi(u) \to +\infty$ cuando $\|u\| \to +\infty$.

Lema 1.2. Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ una función convexa s.c.i. en el espacio de Banach reflexivo X, entonces ϕ es d.s.c.i.

Teorema 1.6. Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si $x_n \rightharpoonup x$ en la topológia débil X, entonces $\|x_n\|$ es acotada y

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

El siguiente resultado será usado en algunas desigualdades.

Lema 1.3. Si $1 \leq r < \infty$ y $a \geq 0, b \geq 0$, entonces $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$

Demostración. $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $\phi(t) = t^r$ entonces

$$\phi''(t) = r(r-1)t^{r-2} \geq 0 \text{ para } t \geq 0,$$

lo que garantiza que ϕ es convexa y

$$\phi(at + (1-t)b) \leq t\phi(a) + (1-t)\phi(b), \;\; a, b \in \mathbb{R}, \;\; \forall t \in [0,1],$$

como $\phi(a+b) = \phi(\frac{1}{2}(2a) + \frac{1}{2}(2b))$ sigue de la convexidad de ϕ que

$$\phi(a+b) \leq \frac{1}{2}\phi(2a) + \frac{1}{2}\phi(2b),$$

dado la forma tenemos que:

$$(a+b)^r \leq \frac{1}{2}(2a)^r + \frac{1}{2}(2b)^r = 2^{r-1}(a^r + b^r)$$

$\square$

1.2.1. Teorema de la función implícita

Teorema 1.7. Sean X, Y, Z espacios normados (Por ejemplo $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ o aun $\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$) supongamos ademas que Y es un espacio métrico completo con respecto a la metrica índucida por la norma.

Sea $F : W \to Z$ una aplicación definida en una vecindad W del punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$, continua en (x_0, y_0), junto con la derivada parcial $F'_y(x, y)$ el cual es supuesto que está en W. Si $F(x_0, y_0) = 0$ y existe $(F'_y(x_0, y_0))^{-1}$ y $\left\|(F'_y(x_0, y_o))^{-1}\right\| < \infty$, entonces existe una vecindad $U = U(x_0)$ del punto x_0 en X, y una vecidad $V = V(y_0)$ del punto y_0 en Y, y una función $f : U \to V$ continua en x_0 tal que $U_xV \subset W$ y $(F(x,y) = 0$ dentro de $U_xV) \Leftrightarrow (y = f(x), x \in U)$.
Bajo condiciones cortas del teorema, el conjunto determinado por la relación $F(x,y) = 0$ dentro de la vecindad U_xV es la grafica de la función $y = f(x)$.

1.3. Espacios de Sobolev

Presentamos aquí las pricipales definiciones y conceptos relacionados con derivada débil, espacios de Sobolev y alguna de sus propiedades.

Definición 1.12. Diremos que A está **compactamente contenido** en Ω denotado por $A \subset\subset \Omega$ si $A \subset \overline{A} \subset \Omega$ cuando $\overline{A}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.13. El conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ es llamado **soporte de la función** f. Denotamos a este conjunto por $\mathrm{Supp}(f)$

Definición 1.14. $C_0^\infty(\Omega)$ es un conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales para todas las ordenes son continuas y cuyo soporte es un conjunto compacto contenido en Ω. Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto no vacio.
Definimos la función:

$$I_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in K \\ 0, & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

llamada **función característica de *K***.

Definición 1.15. Sea $1 \leq p < \infty$ una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f|_K \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K \subset \Omega$. Sea el vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n,)$ donde los $a > 0$. Entonces a es un multi índice de orden $|a| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Dado un multi índice a, definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Definición 1.16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, α un multiindice y $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremos que g es una **$\boldsymbol{\alpha}$-ésima derivada débil de $\boldsymbol{f}$en $\boldsymbol{\Omega}$** y escribimos $D_f^\alpha = g$ si

$$\int f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Definición 1.17. Sea k un entero no negativo y $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como un espacio de las clases de equivalencias de funciones $u \in L^p(\Omega)$ tal que cualquier derivada débil de u hasta orden k es una función de $L^p(\Omega)$, esto es, $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ con } |\alpha| \leq k\}$.

Denotaremos $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Observación 4. $C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$. Ademas de eso $1 \leq p \leq \infty; W^{k_2,p} \subset W^{k_1,p}(\Omega)$, cuando $k_1 \leq k_2$ para $1 \leq p < \infty, W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma.

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

Por otro lado $W^{k,\infty}(\Omega)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma.

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{\|\alpha\| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Definición 1.18. Denotemos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ el cierre o cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma $\|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ y por $W^{-k,q}(\Omega)$ el espacio dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Por tanto una función $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y solo si existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Una función $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ satisface $D^\alpha u = 0$ en $\partial\Omega$ para todo $|\alpha| \leq k-1$. Notamos que para cada k no negativo, $W_0^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma inducida de $W^{k,p}(\Omega)$. Una norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente a la norma definida en $W^{k,p}(\Omega)$ es dada por

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}$$

Pasamos ahora a considerar algunos teoremas de inmersión. Sean U y V espacios vectoriales normados.

Definición 1.19 (Inmersión continua)**.** $(U \to V)$ Diremos que la inducción $U \subset V$ es una inmersión continua si la aplicación inducción $I : U \to V$ fuera continua, o sea U está inmerso continuamente en V si existe una constante C tal que:

$$\|u\|_V \leq C\,\|u\|_U\,, \quad \forall u \in U$$

Definición 1.20 (Inmersión compacta)**.** $U \xrightarrow{c.p.t.} V$ si la aplicación inclusión además de continua fuera compacta; diremos que la **inmersión** $U \hookrightarrow V$ es **compacta**. En otras palabras, sucesiones compactadas en U poseen subsucesiones convergentes en V.

Teorema 1.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase $C^1(\Omega)$ con frontera acotada $1 \leq p \leq \infty$. Entonces son continuas las siguientes inmersiones:

i) Si $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ donde $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{N}$

ii) Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p,\infty)$,

iii) Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Observación 5. De las partes (i) y (ii) del Teorema 1.8 sigue que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

donde $q = \frac{Np}{N-p}$ si $N > p$, es decir

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \exists q > 0,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N};\ \text{y } q \in [p,+\infty) \text{ si } N = p.$$

En particular si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ tenemos

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y por la equivalencia de normas anteriormente informada, tenemos

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 1.9 (Killich- Kondrachov)**.** Sea $\Omega\ C\ \mathbb{R}$ un subconjunto abierto y acotado de clase $C^1(\Omega)$ y $N \geq 2$. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:

i) Si $p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*)$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

ii) Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$

iii) Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

Corolario 1.9.1 (Del teorema de Killich- Kondrachov)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado. Para $p \geq 1$ vale $W^{1,p}\Omega \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

1.4. Función de Caratheodory y el operador de Nemytskii

Esta sección es dedicado al estudio de las funciones de Caratheodory, al operador de Nemytskii. Para las aplicaciones que presentaremos en esta trabajo, será preciso estudiar la continuidad del operador de Nemytskii, también llamado el operador de superposición.

Definición 1.21. Diremos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función de Caratheodory**, si satisface

1. Para cada $s \in \mathbb{R}$, la función $s \longmapsto f(x, 1)$ es Lebesgue medible en Ω

2. Para casi todo $x \in \Omega$, la función $s \to f(x, 1)$ es continua en $\mathbb{R}$. Por convención, en el caso de una función Caratheodory; la afirmación "$x \in \Omega$" debe ser entendida como válida para casi todo punto $x \in \Omega$. Denotando por M el conjunto de todas las funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.5. Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fuera una función de Carathedory, entonces para toda $u \in M$, la función $x \longmapsto f(x, u(x))$ es medible

Demostración. Mostraremos que si $u \in M$ entonces $f(u, u(\cdot)) \in M$. Notemos que si v es una función simple entonces $f(\cdot, v(\cdot))$ es medible.
De hecho siendo v una función simple, podemos escribir de la forma $v = \sum a_i X_{E_i}$, con partición medible de Ω. De ahí

$$f(x, v(x)) = f\left(x, \sum_{i=1}^{m} a_i X_{E_i}(x)\right) = \sum X_{E_i}(x) f(x, a_i).$$

Asimismo siendo $x \longmapsto f(x, a_i)$ medible, por hipótesis, tenemos que $f(\cdot, v(\cdot)) \in M$ consideremos ahora una sucesión de funciones simples $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en M tal que $u_n \to u$ c.t.p. en Ω.

Acabamos de mostrar que $f(\cdot, u_n(\cdot))$ es medible para todo $n \in \mathbb{N}$. como $f(\cdot, u_n(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ c.t.p. de Ω se sigue que $f(\cdot, u(\cdot)) \in M$ pues es límite c.t.p. de una sucesión de funciones medibles en Ω. $\square$

Como consecuencia de este resultado tenemos para una función de Caratheodory, podemos definir el operador $N_f : M \to M$ por $u \in M$; $N_f u \in M$, donde $N_f u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \Omega$ se tiene $(N_f u)(x) = f(x, u)(x)$, llamdo el **operador de Nemytskii**. En verdad estamos interesados en saber cuando el operador N_f define una aplicación de un espacio $L^{p_1}(\Omega)$ en otro espacio $L^{p_2}(\Omega)$ y principalmente cuando este es continuo. El próximo resultado responde a esta pregunta.

Proposición 1.6. Supongamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función de Caratheodory, y que la siguiente condición de crecimiento sea satisfecha.

$$|f(x, s)| \leq C\,|s|^r + b(x), x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$$

donde $C \geq 0$ y constante, $r > 0$ y $b \in L^{q_1}(\Omega)$ para $1 \leq q_1 < \infty$ Entonces $N_f(L^{q_1 r}(\Omega)) \subset L^{q_1}(\Omega)$. Ademas N_f es continua de $L^{q_1 r}(\Omega)$ en $L^{q_1}(\Omega)$ y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Demostración. Como $N_f : L^{q_1 r}(\Omega) \to L'(\Omega)$ vamos a demostrar que $N_f u \in L^{q_1}(\Omega)$ donde $u \in L^{q_1 r}(\Omega)$, en efecto

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |N_f u(x)|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_1} &= \left(\int_\Omega |f(x, u(x))|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_1} \\
&\leq \left(\int_\Omega C(|u(x)|^r + b(x))^{q_1} dx\right)^{1/q_1} \\
&\leq \left(\int_\Omega (C\,|u(x)|^r)^{q_1} dx\right)^{1/q_1} + \left(\int_\Omega |b(x)|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_1} < \infty
\end{aligned}$$

Asimismo tenemos $N_f u \in L^{q_1}(\Omega)$ Ademas de eso

$$\|N_f u\|_{0,q_1} \leq C\,\|u\|_{0,q_1 r}^r + \|b\|_{0,p_1}$$

implica que N_f es acotado, pues aplica conjunto acotados en conjuntos acotados.

Para mostrar la continuidad de N_f vamos a mostrar que toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{q_1 r}(\Omega)$ con $u_n \to u$ en $L^{q_1 r}(\Omega)$, tiene una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $N_f u_{n_k} \to N_f u$ en $L^{q_1}(\Omega)$. De hecho por el Teorema 1.1 tenemos que dada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{q_1 r}(\Omega)$ con $u_n \to u$ existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$ y existe $h \in L^{q_1 r}(\Omega)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$. Como la sucesión $(f(x, u_{n_k}(x)))_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(f(x, u_{n_k}(x))) \to f(x, u(x))$ para c.t.p. $x \in \Omega$ o $N_f u_{n_k}(x) \to N_f u(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$. Asimismo tenemos que:

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leq C\,|u_{n_k}(x)|^r + b(x) \leq C\,|h(x)|^r + b(x) \text{ para c.t.p. } x \in \Omega$$

y

$$|N_f u(x)| = \lim_{k\to\infty} |N_f u_{n_k}(x)| \leq C\,|h(x)|^r + b(x) \text{ para c.t.p. } x \in \Omega.$$

pero

$$\begin{aligned} |N_f u_{n_k} - N_f u(x)|^{q_1} &\leq (|N_f u_{n_k}(x)| + |N_f u(x)|)^{q_1} \\ &\leq (2(C\,|h(x)|^r + b(x)))^{q_1} \\ &\leq 2^{q_1} 2^{q_1-1} \left(C^{q_1}\,|h(x)|^{q_1 r} + |b(x)|^{q_1}\right) \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

De ahí por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que:

$$\|N_f u_{n_k} - N_{f_u}\|_{0,q_1}^{q_1} = \int_\Omega |N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)|^{q_1}\,dx \longrightarrow 0$$

cuando $k \to \infty$ esto es $N_f u_{n_k} \to N_f u$, por tanto N_f es continua con resultado al potencial del operador de Nemytskii, tenemos el siguiente resultado. □

Proposición 1.7. Supongamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Caratheodory satisfaciendo la siguiente condición de crecimiento

$$|f(x,s)| \leq C\,|s|^{q_1} + b(x), x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$$

donde $C \geq 0$ es constante, $q > 1, b \in L^{q_1}(\Omega)$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.
Sea $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$$

Entonces :

1. F esde Caratheodory y existe $C_1 \geq 0$ constante y $C \in L'(\Omega)$tal que $|F(x,s)| \leq C_1\,|s|^q + C(x)$ para $x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$

2. La función $\Phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por:

   $$\Phi(u) := \int_\Omega N_F u = \int_\Omega F(x,u)$$

   es continuamente Frechet diferenciable y $\Phi'(u) = N_f u$ para todo $u \in L^q(\Omega)$

Demostración. Como f es una función de Caratheodory tenemos por la definición que

F es también de Caratheodory luego

$$\begin{aligned}
|F(x,s)| &= \left|\int_0^s f(x,\tau)d\tau\right| \leq \int_0^{|s|} (C\,|\tau|^{q-1} + b(x))d\tau \\
&= \left(\frac{C}{q}\tau^q + b(x)\tau\right)\Big|_0^{|s|} \\
&= \frac{C}{q}\,|s|^q + |s|\,b(x); \quad \text{desig. de Young } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{q}\,|s|^q + \frac{|s|^q}{q} + \frac{(b(x))^{q'}}{q'} \\
&= \frac{(C+1)}{q}\,|s|^q + \frac{1}{q'}(b(x))^{q'}
\end{aligned}$$

Entonces $|F(x,s)| \leq C_1\,|s|^q + c(x)$, para $x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$. donde $C_1 = \frac{c+1}{2}$ y $\frac{1}{q'}(b(x))^{q'} = c(x) \in L^1(\Omega)$ pues $b \in L^{q'}(\Omega)$, eso muestra la continuidad de Nf implica que Φ es continua.

Ahora sea $u \in L^q(\Omega)$ fijo, defina

$$\begin{aligned}
\delta(h) &= \Phi(u+h) - \Phi(u) - \int_\Omega f(x,u)hdx \\
&= \int_\Omega [F(x,u+h) - F(x,u)]\,dx - \int_\Omega f(x,u)hdx
\end{aligned}$$

por el T.F.C.,tenemos

$$\begin{aligned}
\delta(h) &= \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{d}{dt}(F(x,u+th))dt\right] dx - \int_\Omega \left[\int_0^1 (x,u)hdt\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 (f(x,u+th)h)dt\right] dx - \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,u)hdt\right] dx \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 (f(x,u+th) - f(x,u))hdt\right] dx
\end{aligned}$$

Utilizado el teorema de Fubini obtenemos

$$\delta(h) = \int_0^1 \int_\Omega (f(x,u+th) - f(x,u))hdxdt$$

tomando límite a ambos lados, tenemos

$$|\delta(h)| \leq \int_0^1 \left|\int_\Omega (N_f(u+th) - N_f u)hdx\right| dt$$

Por la desigualdad de Holder

$$
\begin{aligned}
|\delta(h)| &\leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |N_f(u+th) - N_f|^{q'}\, dx\right)^{1/q'} \left(\int_\Omega |h|^q\, dx\right)^{1/q} dt \\
&= \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'} \|h\|_{0,q}\, dt \\
&= \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'}\, dt\, \|h\|_{0,q}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} \leq \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q}\, dt
$$

De ahí, si $h \to 0$ en $L^q(\Omega)$,

$$
0 \leq \lim_{h\to 0} \frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} \leq \lim_{h\to 0} \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q}\, dt
$$

y el operador de Nemytskii N_f es acotado y continua, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$
0 \leq \lim_{h\to 0} \frac{|\delta|\,(h)}{\|h\|_{0,q}} \leq \int_0^1 \lim_{h\to 0} \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q}\, dt
$$

Asimismo

$$
\lim_{h\to 0} \frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} = 0
$$

esto Φ es Frechetdiferenciable y

$$
\langle \Phi'(u), h\rangle = \int_\Omega f(x,u) h dx, \forall h \ \in \ L^q(\Omega)
$$

esto es, $\Phi(u) = F(x,u) = N_f u$.
La continuidad de Φ' está garantizada pues N_f es continua.
Por tanto $\Phi \ \in \ C^1(L^q(\Omega), \mathbb{R})$ $\square$

Observación 6. Con las concluciones de la Proposición 1.7, tenemos que

$$
N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega), N_f(L^q(\Omega)) \subset L'(\Omega)
$$

donde los operadores de Nemytskii N_f y N_F son continuos y acotados. De hecho sea $r = q-1$ y $q_1 = q'$ entonces por la Proposición 1.7 tenemos que $N_f(L^{q'(q-1)}(\Omega)) \subset L'(\Omega)$. Pero como $q = q'(q-1)$ entonces $N_f(L^1(\Omega)) \subset L^1(\Omega)$ y por la misma proposición N_f es acotada y continua. De la misma forma las afirmaciones sobre Nf son verdaderas al considerar $r = q$ y $q_1 = 1$ se debe notar también que para cada $u \in L^q(\Omega)$ fijo, $N_f u = \Phi'(u) \in L'(\Omega)$.

Ahora vamos a establecer condiciones que nos va a permitir obtener la solución de un problema semilineal.

Vamos a denotar por p^* al exponente conjugado de Sobolev de p que es definido por:

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{si, } p < N, \\ \infty & \text{si, } p \geq N. \end{cases}$$

Asumamos ahora que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory satisfaciendo la condición de crecimiento.

$$|f(x,s)| \leq C\,|s|^{q-1} + b(x)$$

para $x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$ donde $C \geq 0$ constante $q \in (1, p^*), b \in L^{q'}(\Omega), \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Observación 7. Por el Teorema de Rellich Kondrachov 1.9 tenemos que la restrcción $q \in (1, p^*)$ garantiza que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es una inmersión compacta. Asimismo el diagrama

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{I_d} L^q(\Omega) \xrightarrow{N_f} L'(\Omega) \xrightarrow{I_d^*} W^{-1,p'}(\Omega)$$

muestra que N_f es un operador compacto (es decir es compacto y aplica conjuntos compactos en conjuntos relativamente compactos) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Lema 1.4. Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Caratheodory que satisfaga la condición de crecimiento de observación 7. Entonces la función $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)$$

donde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau$$

es continuamente Frechet diferenciable en

$$W_0^{1,p}(\Omega) \text{ y } \langle \Phi'(u), h\rangle = \int_\Omega f(x,u)hdx, \forall\ h\ \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demostración. Probaremos la existencia de la derivada de Gateaux y después que está es continua

Sea $t \in (0,1)$ y $g : [0,r] \to \mathbb{R}$ una función definida por $g(s) = F(x, u + sth)$. Desde que g es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, por el teorema del valor medio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $|g(1) - g(0)| = |g'(\theta)|$, osea

$$|F(x, u+th) - F(x,u)| = |f(x, u + \theta th)th| \tag{1.1}$$

Por la condición de crecimiento.tenemos que.

$$\begin{aligned} |f(x, u+\theta th)|\,|h| &\leq (C\,|u + \theta th|^{q-1} + b(x))\,|h| \\ &\leq (C_1(|u|^{q-1} + |h|^{q-1}) + b(x))\,|h| \end{aligned}$$

De ahí por la desigualdad de Holder y el hecho que la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es continua

$$\int_\Omega |u|^{q-1} |h| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^q \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |h|^q \, dx \right)^{1/q} < \infty$$
$$\int_\Omega |b(x)| \, |h| \, dx \leq \left(\int_\Omega |b|^{q'} \, dx \right)^{1/q'} \left(\int_\Omega |h|^q \, dx \right)^{1/q} < \infty$$

Luego $(C\,|u|^{q-1} + |h|^{q-1} + b(x))\,|h| \to u(x)$, c.t.p.en Ω cuando $t \to 0$ y f continua en la segunda variable entonces

$$f(x,u(x)) + t\theta h(x)h(x) \to f(x,u(x))h(x) \text{ c.t.p. en } \Omega, \text{ cuando } t \to 0$$

Asimismo,es cuando (1.1) y aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,obtenemos:

$$\frac{1}{t}\int_\Omega (F(x,u+th) - F(x,u))dx \to \int_\Omega f(x,u)hdx$$

cuando $t \to 0$. Por tanto;

$$\langle \Phi'(u)h \rangle = \int_\Omega f(x,u)dx$$

Para mostrar que $\Phi' : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ es continua, supongamos que $u_n \to u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. como la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es continua , tenemos que $u_n \to u$ en $L^q(\Omega)$, ya que $|f(x,s)| \leq C\,|s|^{q-1} + b(x)$ podemos usar la continuidad del operador Nemytskii para obtener :

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \text{ en } L^{q'}(\Omega) \tag{1.2}$$

donde $q' = \frac{q}{q-1}$, usando la desigualdad de Holder de nuevo el hecho que la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es continua tenemos:

$$\begin{aligned} |\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), h \rangle| &\leq \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)| \, |h| \, dx \\ &\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{0,q'} \, \|h\|_{0,q} \\ &\leq k \, \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{0,q'} \, \|h\|_{1,q} \end{aligned}$$

Entonces

$$\|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\| = \sup_{0 \neq h \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), h \rangle|}{\|h\|_{1,p}}$$

De ahí, se sigue de (1.2) que:

$$\Phi'(u_n) \to \Phi(u)$$

en $W_0^{-1,p'}(\Omega)$. Por tanto tenemos que $\Phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ $\square$

1.5. En operador p-Laplaciano

En forma clásica,el operador p-Laplaciano $\Delta_p : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto y $p > 1$ es definido por $\Delta_p(u) = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. En el caso $p = 2 \quad \Delta_2 u = div(|\nabla u|^{2-2} \nabla u) = div(\nabla u)$.
Eso motiva la definición

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

Donde Ω es un abierto limitado con frontera suave, y Δ_p lleva $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en el funcional $\Delta_p u$

$$\Phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \to -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \Phi dx \tag{1.3}$$

Por la desigualdad de Holder tenemos:

$$\left| \int_\Omega |\nabla|^{p-2} \nabla u, \nabla \Phi dx \right| \leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p-1}{p}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\Phi\|, \tag{1.4}$$

luego ese funcional de hecho es acotado y tiene norma $\|u\|^{p-1}$,el cual usaremos la norma $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}$ en $W_0^{1,p}$ siendo equivalente a la usual por la desigualdad de Sobolev.

Representamos a los funcionales lineales en espacios de Sobolev:

Teorema 1.10. $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*$ es un homeomorfismo.

Para eso hacemos la siguiente estimativa.

Lema 1.5. Veamos:
Si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^N$ y $p \geq 2$. Entonces

$$\left(|s_2|^{p-2} s_2 - |s_1|^{p-2} s_1\right).(s_1 - s_2) \geq C |s_2 - s_1|^p$$

Si $1 < p < 2$, entonces

$$\left(|s_2|^{p-2} s_2 - |s_1|^{p-2} s_1\right)(s_1 - s_2) \geq C \frac{|s_2 - s_1|^2}{(|s_2| + |s_1|)^{2-p}}$$

Aquí $C > 0$ depende de p. Observemos que si $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Entonces las aplicaciones:

$$s \to |s|^{p-2} s \text{ y } r \to |r|^{q-2} r$$

son inversas. Luego aplicando el lema anterior para $s_i = |r_i|^{q-2} r_i$, obtenemos

$$\left||r_2|^{q-2} r_2 - |r_1|^{q-2} r_1\right| \leq C |r_2 - r_1|^{q-1} \quad si\ 1 < q \leq 2 \tag{1.5}$$

$$\left||r_2|^{q-2} r_2 - |r_1|^{q-2} r_1\right| \leq \underbrace{C |r_2 - r_1| \left||r_2|^{q-1} + |r_1|^{q-1}\right|^{\frac{q-2}{q-1}}}_{\text{si } q=2} \tag{1.6}$$

Demostración. Primeramente notamos que $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces dada $\Phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ un $\|\Phi\| \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
|(\Delta_p u_2 - \Delta_p u_1)(\Phi)| &= \left|\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1)\nabla\Phi dx\right| \\
&\leq \left(\int_\Omega \left||\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Asimismo si $1 \leq p \leq 2$ se sigue inmediatamente de (1.5) que Δ_p es un operador continuo. Para el caso $p \geq 2$, la continuidad de $-\Delta p$ sigue de (1.6) y de una aplicación conveniente de desigualdad de Holder. Verifiquemos que $-\Delta p$ es inyectivo. Si $p \geq 2$ entonces por el Lema 1.5

$$\begin{aligned}
|\Delta_p u_2 \Delta_p u_1| &\geq \frac{1}{\|u_1 - u_2\|} \int_\Omega \left(|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1\right).\nabla(u_1 - u_2) dx \\
&\geq C \|u_2 - u_1\|^{p-1}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

para $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ cualesquiera.
Si $1 < p < 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)|^p dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u_2 - u_1)|^p}{(|u_2| + |u_1|)^{p(2-p)/2}}.(|u_2| + |u_1|)^{p(2-p)/2} dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_2 - u_1)|^2}{(|u_2| + |u_1|)^{2-p}} dx\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|u_2| + |u_1|)^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}
\end{aligned}$$

osea.

$$|\Delta_p u_2 - \Delta_p u_1| \geq C \frac{\|u_2 - u_1\|}{(\|u_2\| + |u_1|)^{2-p}} \tag{1.8}$$

Mostraremos ahora que $-\Delta_p$ es sobreyectivo. Dada $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, definamos el funcional

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ por } J(u) = \frac{1}{p} \int_u |\nabla u|^p dx - f(u).$$

Dada $\Phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos para cada $x \in \Omega$

$$\frac{d}{dt}(\nabla u + t\nabla\Phi)^p = p\left|\nabla u + t\nabla\Phi\right|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\Phi).\nabla\Phi dt$$

Por tanto, para cierto $0 < t = t(x) < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} J(u+\Phi) - J(u) &= \int_\Omega \left|\nabla u + t\nabla\Phi\right|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\Phi).\nabla\Phi dx - f(\Phi) \\ &= \int_\Omega \left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u.\nabla\Phi dx - f(\Phi) + r(\Phi) \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} r(\Phi) &= \int_\Omega \left(\left|\nabla u + t\nabla\Phi\right|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\Phi) - \left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\Phi dx \\ &\leq \left(\int_\Omega \left|\left|\nabla u + t\nabla\Phi\right|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\Phi) - \left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\Phi\| \end{aligned}$$

usando nuevamente las desigualdades (1.5) y (1.6), concluimos que

$$r(\Phi) = 0(\|\Phi\|)$$

osea

$$r(\Phi)/\|\Phi\| \to 0$$

cuando $\Phi \to 0$. Por tanto, $J \in C^1(W_0^{1-p}(\Omega))$ y $J'(u) = -\Delta_p u - f$. El operador J es acotado inferiormente. En efecto

$$J(u) = \|u\|^p - f(u) \geq (\|u\|^{p-1} - \|f\|)\|u\| \tag{1.9}$$

Mas de eso, J posee un punto mínimo. osea $m = \text{ínf } Jy\{u_n\}$ una sucesión minimizante, es $J(u_n) \to m$. Por (1.9) (u_n) es acotada como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, todo conjunto acotado es pre-compacto en la topología débil, y pasando a una subsucesión podemos saber que u_n convergente debilmente a una cierta u. Recordemos que una norma es debilmente sucesionalmente semicontinua inferiormente,que es un nombre pomposo, para el hecho de que,tomando limite a un funcional lineal de norma 1 tal que $\|u\| = L(u)$, obtenemos $\|u\| = L(u) = \lim_{n\to\infty} L(u_n) \leq \lim_{n\to\infty} inf\,\|u_n\|$ Asimismo

$$J(u) \leq \lim_{n\to\infty}(1/p)(\|u_n\|^p - f(u_n)) = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = m$$

Por tanto, u es un punto mínimo y $J'(u) = 0$ osea $-\Delta_p u = f$ Por fin, la continuidad de la inversa $(-\Delta_p)^{-1}$ se sigue de (1.7) y (1.8). $\square$

1.6. Propiedades del operador p-Laplaciano

En esta parte discutimos el operador p-laplaciano

$$-\Delta_p u := -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Consideremos el siguiente funcional:

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p \, dx \; ; u \in X' := W_0^{1,p}(\Omega)$$

sabemos que (ver chang [3]), $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ y que el operador p-laplaciano es la derivada del operador J en el sentido débil. Demostraremos $L = J' : X \to X^*$, entonces:

$$\langle L(u), v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \; \nabla v dx \; \forall v, u \in X$$

Teorema 1.11.

1. $L : X \to X^*$ es un operador estrictamente monótomo; continuo y acotado
2. L es una aplicación del tipo (S_+) es decir si $u_n \rightharpoonup u$ en X y $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle L(u_n) - L(u), u_n - u \rangle \leq 0$ entonces $u_n \to u$ en X;
3. $L : X \to X^*$ es un homeomorfismo.

Demostración.

1. Es obvio que L es un operador continuo y acotado. Para $\tau, \eta \in \mathbb{R}^N$, tenemos las siguientes desigualdades hechas anteriormente, para el cual tenemos que L es estrictamente monótono:

$$\left[(|\tau|^{p-2} \tau - |\eta|^{p-2} \eta)(\tau - \eta) \right] . (|\tau|^p + |\eta|^p)^{(2-p)/p} \geq (p-1) |\tau - \eta| \quad \text{para } 1 < p < 2 \tag{1.10}$$

$$\left(|\tau|^{p-2} \tau - |\eta|^{p-2} \eta \right) (\tau - \eta) \geq (\frac{1}{2})^p |\tau - \eta| \, ; p \geq 2$$

2. Desde que tenemos (i), si $u_\eta \rightharpoonup u$ y $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle L(u_n) - L(u), u_n \rangle \leq 0$, entonces

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle L(u_n) - L(u), u_n \rangle = 0.$$

Miremos de (1) y (2) que ∇u_n converge en medida a ∇u en Ω adquirimos una subsucesión (el cual denotaremos por ∇u_n) satisfaciendo $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$ sil. Por el Lema de Fatou, tenemos :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u_n|^p \, dx \geq \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p \, dx \tag{1.11}$$

desde que $u_n \rightharpoonup u$, tenemos que.

$$\lim_{n\to\infty} \langle L(u_n), u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle L(u_n) - L(u_n) - L(u), u_n - u\rangle = 0 \tag{1.12}$$

Además tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle L(u_n), u_n - u\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla u| \, dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \int_\Omega \left(\frac{p-1}{p} |\nabla u_n|^p + \frac{1}{p} |\nabla u|^p \right) dx \\
&\geq \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u_n|^p \, dx - \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p \, dx
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Juntando (1.11) y (1.13), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla_n|^p \, dx = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p \, dx \tag{1.14}$$

De (6), ello sigue que las integrales de una familia de funciones posee equicontinuidad absoluta en Ω. Desde que

$$\frac{1}{p} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^p \leq C \left(\frac{1}{p} |\nabla u_n(x)|^p + \frac{1}{p} |\nabla u(x)|^p \right) \tag{1.15}$$

Las integrales de la familia $\left\{ \frac{1}{p} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^p \right\}$ son además equicontinuos absolutamente en Ω y por esto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^p \, dx = 0 \tag{1.16}$$

Por (8)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^p \, dx = 0$$

□

Veamos la siguiente proposición

Proposición 1.8. Si $u, u_n \in L^p(\Omega), n \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes entre si

1. $\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_p = 0$;
2. $\lim_{k\to\infty} p(u_k - u) = 0$; donde $p(u) = \int_\Omega |u|^p \; dx \; \forall \; u \in L^p \; (\Omega)$

3. $u_k \to u$ en medida en Ω y $\lim\limits_{k\to\infty} p(u_k) = p(u)$

Por la monotocidad estricta, L es inyectiva y desde que:

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Lu, u\rangle}{\|u\|} = \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\|u\|} = \infty$$

L es coerciva.

Capítulo 2

Teoría de Morse

Definición 2.1. Sea $(G_i)_{i\in N}$ una sucesión de grupos abelianos y $(g_i)_{i\in Z}$ es una sucesión de homomorfismos de la forma:

$$\longrightarrow\ G_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} G_i \xrightarrow{g_i} G_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} \cdots$$

Donde $g_{i-1} : G_{i-1} \to G_i$ se dice que la sucesión anterior es exacta en G_i si:

$$Ker(g_i) = Im(g_{i-1})$$

Una suceción es exacta si es exacta en todo G_i.
Ejemplo, la sucesión:

$$O \xrightarrow{0} G_1 \xrightarrow{g} G_2 \to O$$

Es exacta si solo si $g : G_1 \to G_2$ en un isomorfismo si G es un grupo abeliano y $H<G$(subgrupo), entonces se tiene una suceción:

$$O \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} G/H \to O$$

Donde $i : H \to G$ es inyectiva y $q : G \to G/H$es sobreyectiva.

2.1. Axiomas principales

Un par de espacios topológicos (X, A); $A \subseteq X$, escribimos $(X, A) \subseteq (Y, B)$ si $X \subseteq Y$ y $A \subseteq B$, una aplicación de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una aplicación continua $f : X \to Y, f(A) \subseteq B$. Dos aplicaciones de pares $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ son homotópicas si existe una aplicación $H : [0, 1] \times (X, A) \to (Y, B)$ tal que $H(0, x) = f_0(x)$ y $H(1, x) = f_1(x)$

Si $A \subseteq X$, una aplicación $r : X \to A$ es una retracción o retracto si $r(x) = x$, $\forall x \in A$; se dice que A es un retracto de X si $H : [0, 1] \times X \to X$ tal que $H_0(x) = x$ y $H_1(x) = r(x)$ se dice que A es un retracto de deformación de X y se dice que A es un retracto de deformación fuerte de X si la homotopía H satisface también $H_t(x) = x$

2.2. Grupos de Homología

Para cada $q \in \mathbb{Z}$ y cada triple (X, A, G) donde (X, A) es un par de espacios y G es grupo abeliano asociado a un grupo abeliano $H_q(X, A, G)$.

2.2.1. Homología singular

Para cada entero $q \geq 0$ el simplejo o padrón es un conjunto

$$\triangle^q = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^q : x_1, x_2, \cdots, x_q \geq 0 \text{ y } \sum_{1<k<q} x_k \leq 1 \right\}.$$

En particular $\Delta^0 = \{0\}$ es un punto, para cada $0 \leq p \leq q$ tenemos una aplicación cara $F_p : \Delta^q \to \Delta^{q+1}$ dada por:

$$F_p(x_1, x_2, \cdots, x_q) = (x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}, 0, x_p, \cdots, x_q)$$

para cada $1 \leq p \leq q$ y

$$F_0(x_1, \cdots, x_q) = \left(x_1, \cdots, x_q, 1 - \sum_{1 \leq k \leq q} x_k \right)$$

Si X es un espacio topológico, un q-simplejo singular es una aplicación continua $s : \Delta_q \to X$ es una q cadena con coeficiente en un anillo dado R, donde s es un elemento del R-módulo libre $C_q(X, R)$ generando por todos los q-simplejos singulares en X.
En el caso que $R = \mathbb{Z}$, en que $C_q(X, R)$ es simplemente el grupo abeliano generado libremente por todos los q-simplejos; en el caso que R es un cuerpo, entonces $C_q(X, R)$ es un espacio vertorial definido del operador borde $\partial_{q+1} : C_{q+1}(X, R) \to C_q(X, R)$, extendiendo linealmente la aplicación que aplica un $\partial_{q+1}(s)$ en

$$\partial_{q+1} s = \sum_{0 \leq k \leq q} \left\{ (-1)^k \right\} S_0 F_k$$

Se llama a $z \in ker(\partial_q)$ un q-ciclo y un $b \in Im(\partial_{q+1})$ un q-borde se verifica $\partial_{q+2} \circ \partial_{q+1} : C_{+2}(X, R) \to C_q(X, R)$ donde $\partial_{q+2} \circ \partial_{q+1} = 0$, $\forall q \in \mathbb{Z}$. esto motiva la definición de los módulos de homología singular de X con coeficientes en R.

$$H_q(X, G) = \frac{Ker\partial_q}{im\partial_{q+1}} = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}$$

Se llama grupo de homología singular del espacio topológico X.

2.2.2. El número de Betti

El k-ésimo número de Betti se refiere al número k-dimensional de superficies no conectadas, es decir

b_0 : número de componentes conectadas.
b_1 : número de agujeros circulares bidimensionales.
b_2 : número de agujeros vacios tridimensionales.

El número de Betti es un entero no negativo que se define como el rango del k-esimo grupo abeliano de homología $H_k(X)$ o como la dimensión del espaicio vectorial $H_k(X, Q)$ o más generalmente dado un cuerpo F se puede definir $b_k(X, F)$ como el k-esimo número de Betti como la dimensión del F-espacio vectorial $H_k(X, F)$

Ejemplo 1. Un toro tiene un componente conectado $b_0 = 1$. Tiene dos agujeros circulares (uno en el centro y otro en el tubo) $b_1 = 2$. Tiene un vacio tridimensional (en el interior del tubo) $b_2 = 1$. La notación es $\beta_k = rank(H_k(S))$ se denomina el k-esimo número de Betti de S.

Observación 8. La motivación original de homología era definir los grupos de homología que describan agujeros, del espacio topologíco.
Cada generador indica la estructura del espacio topologíco como dimensión y orientabilidad.

$$\mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z}$$

Sea S un triangulo (no cubierto) visto como un complejo simplicial tiene tres vertices $v_0v_1v_2$

$$\rightarrow H_1(S) \approx \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \approx \mathbb{Z}$$

De manera informal la homología de un espacio topologíco X es un conjunto de variantes topológicos de X representando por grupo de Homología $H_0(X), H_1(X), H_2(X), \cdots$, donde el k-ésimo grupo de homología $H_k(X)$ describe los k agujeros dimensionales de X.

Un agujero 0-dimensional es simplemente un espacio entre componentes, en consecuencia $H_0(X)$ describe la conexión en una componente X.

Un balón de una dimensión $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$, es un círculo solo tiene una componente conectado y un agujero de dimensión uno. Pero no hay agujeros de tamaño superior; luego.

$$H_q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; q = 0, 1 \\ \{0\} & ; q \neq 0, 1 \end{cases}$$

Aquí $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = [1] = \overline{1}$ y $\beta_0 = rank(H_0(S^1)) = 1, \beta_1 = rank(H_1(S)) = 1$. Un balón de dimensión 2 o de dos dimensiones es:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}$$

Entonces:

$$H_q(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ;\ q = 0, 2 \\ \{0\} & ;\ q \neq 0, 2 \end{cases}$$

Luego los números de Betti son $\beta_0 = rank(H_0(S^2)) = 1, \beta_1 = rank(H_1(S^2)) = 0, \beta_2 = rank(H_2(S^2)) = 1$. En bolas más generales n-dimensionales los grupos de homología son:

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ;\ q = 0, n \\ \{0\} & ;\ q \neq 0, n \end{cases}$$

Asi tenemos las siguientes propiedades:

1. Si E es un espacio normado de dimensión infinita consideremos B^∞ la bola unitaria, y S^∞ la esfera unitaria siendo B^∞ un retracto de deformación fuerte de E y S^∞ un retracto de deformación fuerte de B^∞ tenemos:
   $H_q(E, B^\infty/\{0\}) \cong H_q(B^\infty, B^\infty/\{0\}) \cong H_q(S^\infty, S^\infty) \cong \{0\}$

2. Si X es conexo por caminos entonces
   $$H_0(X) \cong G$$

3. Si X es un espacio vectorial entonces
   $$H_q(X) = \begin{cases} G & ; q = 0 \\ 0 & ; q \neq 0 \end{cases}$$

4. $$H_q(S^n = G) = H_q(S^n) \cong \begin{cases} 0 & ; q \neq n, q, n \geq 1 \\ G & ; q = n \geq 1 \ y\ q = 0, n \geq 1 \\ G \bigoplus G & si\ q = n = 0 \end{cases}$$

5. $$H_q(B^n, S^{n-1}, G) = H_q(B^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} 0 & ; \text{si } q \neq n \\ G & ; \text{si } q = n \end{cases}$$

6. $$H_q(B^n, G) = H_q(B^n) \cong \begin{cases} G & si\ q = 0 \\ 0 & si\ q > 0 \end{cases}$$

   Donde B^n es una bola en $\mathbb{R}^n$ y $S^{n-1} = \partial B^n$

7. **Invarianza homotópica**
   Si (X, Y, p) y (X', Y', p') son homotópicamente equivalentes, entonces
   $$\pi_k(X, Y, p) = \pi_k(X', Y', p')$$

8. **Isomorfismo de Hurewicz**, E. Spanier [1]
   Sea (X, Y, p) un par con punto base y X y Y son simplemente conexos. Si existe

$k \geq 2$, talque $H_q(X,Y) \cong 0$, entonces $\forall\ k > 2$ existe un isomorfismo

$$\phi : \pi_k(X,Y,p) \to H_k(X,Y)$$

2.3. Teoría de Morse en dimensión infinita

La teoría de Morse, como ligeramente se comentó en la introducción de este trabajo es una herramienta topológica que nos permite localizar los puntos críticos de un funcional bajo ciertas condiciones mediante la investigación de los cambios de las estructuras topológicas de sus conjuntos de nivel. Éstos cambios serán registrados por medio de la topología algebraica. Además el tipo topológico de un punto crítico u con minimizador local o punto de paso a la montaña, es descrito por los grupos de homología relativa. $H_q(\Phi_c, \Phi_c \backslash \{u\})$ que serán llamados grupos críticos. Así asociaremos a cada punto crítico el funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ donde E es un espacio de Banach, una sucesión de grupos críticos $C_q(\Phi, u), q \geq 0$ es un entero, son llamados grupos críticos de Φ en u, obtendremos sobre estas condiciones la existencia de soluciones.
Esto será utilizado en el capitulo 3 para dar a conocer la existencia y multiplicidad de los puntos críticos de funcionales resultantes de la formulación variacional de una ecuación diferencial semi lineal con el operador p- Laplaciano.

2.3.1. Grupos Críticos

Sea E un espacio de Banach y $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1, entonces, para cada $u \in E$ existe un funcional $\Phi'(u) \in E^*$ tal que

$$\frac{|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi'(u)(v)|}{\|v\|} \to 0 \tag{2.1}$$

cuando $\|v\| \to 0$ y la aplicación u $\to \Phi'(u)$ es continua.

Dado c $\in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definimos los conjuntos de subnivel cerrado y abierto de Φ por

$$\Phi_c = \Phi^{-1}((-\infty, c)); \Phi_c^0 = \Phi^{-1}((-\infty, c))$$

Definición 2.2. Ver Jean-Noel Corvellec [4]. Diremos que $u \in E$ es un punto crítico de Φ si $\Phi'(u) = 0$ en este caso $\Phi(u)$ es llamado el **valor crítico** de Φ. En lo que sigue denotaremos el conjunto de los puntos críticos de Φ por K, y sea

$$K_c = \{u \in X : \Phi'(u) = 0, \Phi(u) = c\}$$

se tiene que $K_c \subset K \subset X$. Si $K_c \neq \varnothing$, el número real c es llamado un **valor crítico** de Φ o de otra manera c es llamado **valor regular** de Φ. Con las notaciones anteriores para $c \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ sea el conjunto $D_{c,\delta} = \{u \in K_c : B(u,\delta) \cap K = \{u\}\}$, $S_{c,\delta} = K_c \backslash D_{c,\delta}$ y $K_{c,\delta} = B(S_{c,\delta;}\delta) \cup D_{c,\delta}$ donde $B(A,\delta)$ denota la vecindad cerrada de A.
Si $u \in D_{c,\delta}$ para algún $\delta > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, el punto u es llamado **punto crítico aislado de Φ**.

Si E es una variedad de Hilbert-Riemaniana y $\Phi \in C^2(E, \mathbb{R})$, $u \in K$ es llamado **punto crítico no degenerado** si $d^2\Phi(u)$ tiene inversa acotada. Desde que $A = d^2\Phi(u)$ es un operador autoadjunto el cual posee resolución de identidad, llamaremos la dimensión del espacio negativo correspondiente a la descomposición espectral al índice de Morse de u y lo denotaremos por $\mathrm{ind}(\Phi, u)$ (ello puede ser ∞). Ahora estamos en posición para calcular los grupos críticos de puntos críticos no degenerados vía índice de Morse.

Definición 2.3. El q-ésimo grupo crítico de Morse de Φ en el punto crítico aislado u es definido el grupo de homología relativa.

$$C_q(\Phi, u) = H_q(\Phi_c,\ \Phi_c \setminus \{u\})$$

Aquí solo consideraremos grupos de homología con coeficiente en $\mathbb{R}$ se sigue de la propiedad de excisión que si $\mathbb{U}$ es una vecindad de u, entonces.

$$C_q(\Phi, u) \cong H_q(\Phi_c \cap \mathbb{U}, (\Phi_c \setminus \{u\}) \cap \mathbb{U})$$

Diremos que el funcional Φ cumple la condición de deformación (D_c) en el nivel $c \in \mathbb{R}$ si dados $\varepsilon > 0$ y una vecindad N de

$$K_c = \{u \in E : \Phi(u) = c \text{ y } \Phi'(u) = 0\}, \exists\ \bar{\varepsilon} > 0$$

y una homotopía contínua o deformación continua $\eta : E \times [0, 1] \to E$ tal que:

- $\eta_0 = I_d : E \to E$ o sea $\eta(u, 0) = u$
- $\eta_t(u) = \eta(u, t) = u, \forall u \notin \Phi^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ y $t \in [0, 1]$
- $\Phi(\eta_t(u))$, es decreciente en t para todo $u \in E$
- $\eta_1(\Phi_{c-\bar{\varepsilon}} \setminus N) \subset \Phi_{c-\bar{\varepsilon}}$ donde $\eta_1 = (u) = \eta(u, 1)$
- $\eta_t : E \to E$ es un homeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$

Observemos aquí que bajo ciertas condiciones de compacidad (como la condición de Palais-Smale, definida más abajo) se puede probar que un funcional dado satisface la condición de deformación (D_c).

Diremos que un funcional $\Phi \in C'(E)$ satisface la condición de Palais Smale (PS) si para toda sucesión $\{u_n\} \subset E$ tal que $\{\Phi(u_n)\}$ es acotado y $\Phi'(u_n) \to 0$ se tiene que $\{u_n\}$ posee una subsucesión convergente y diremos que $\Phi \in C'(E)$ satisface la condición compacidad de Cerami (C_C) si para toda sucesión $\{u_n\} \subset E$ tal que $\Phi(u_n) \to c$ y $(1 + \|u_n\|) \|\Phi'(u_n)\| \to 0$, se tiene que $\{u_n\}$ posee una subsucesión convergente.

Se sabe que tanto la condición de Palais-Smale o a la condición de Cerami (C_C) para todo $C \in \mathbb{R}$ implica la condición de deformación (D_c), $\forall c \in \mathbb{R}$, ver Kung Ching Chang [3] para la demostración en el caso de la condición de Palais-Smale, cuando se verifica la condición de cerami (C_C) la demostración es similar al Teorema 2.6 y será omitida.

La siguiente proposición establece la relación basica entre la pendiente débil y el grupo crítico.

Proposición 2.1. Ver Jean-Noel Corvellec [4]. Sea $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ una función semicontinua inferiormente y sea $u \in Dom(\Phi)$, entonces, $|d\Phi|(u) \neq 0$ implica $C_q(\Phi, u) = \{0\}, \forall\ q$

Demostración. Consideremos primero el caso cuando $\Phi : X \to \mathbb{R}$ es continua. Sea $\sigma > 0$, $\delta \in [0,1]$ y $\eta : B(u,\delta) \times [0,\delta] \to X$ continua para $v \in X$, sea $\rho(v) = \max\{\delta - d(v,u), 0\}$ y definimos $\overline{\eta} : X \times [0,\delta] \to X$ por $\overline{\eta}(v,t) = \eta(v, \rho(v)t)$. Entonces si tenemos $c := \Phi(u), \Phi_c \cup \{u\}$ y Φ_c son estables bajo $\overline{\eta}$ y $\overline{n}(\Phi_c \cup \{u\}, \delta) \subset \Phi_c$. Usando las propiedades de homotopía y homología singula, concluimos que

$$C_*(\Phi, u) = H_*(\Phi_c \cup \{u\}, \Phi_c) \cong H_*(\Phi_c, \Phi_c) = \{0\}_*$$

Si $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ es solo semicontinua inferiormente el resultado es inmediato. $\square$

Proposición 2.2. Si Φ satisface (D_c) y $K_c = \varnothing, \forall c \in [a-\delta, b+\delta]$ entonces dado $\varepsilon \in (0,\delta)$, existe una aplicación continua $\eta : E \times [0,1] \to E$ tal que $\eta_0 = I_d, \eta_t(x) = x$ si $x \notin \Phi^{-1}([a-\varepsilon, b+\varepsilon]), \Phi(\eta_t(x))$ es decreciente en t para cada $x \in E$ y $\eta_1(\Phi_b) \subset \Phi_a$.

Demostración. Sea $A \subset [a,b]$ el conjunto definido por

$$A = \{\ell \mid \exists \eta : E \times [0,1] \to E\}$$

donde η es una deformación continua con $\eta_0 = I_d, \eta_t(x) = x$ si $x \notin \Phi^{-1}([a-\varepsilon, b+\varepsilon])$ sustituyendo la condición $\eta_1(\Phi_b) \subset \Phi_a$ por $\eta_1(\Phi_b) \subset \Phi_\ell$ y ponemos $\ell_0 = \inf(A)$. Es claro que $[\ell_0, b] \subset A$ pues dado $x \in [l_0, b] \to l_0 \leq x \leq b$ y como $a \leq \inf(A) = l_0$ y $\Phi(x) \notin [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ por definición de ínfimo $x \in A$, luego basta mostrar que no puede ser $l_0 > a$. En efecto en ese caso, por (D_{ℓ_0}) tendríamos una deformación $\bar{\eta}$ talque $\bar{\eta}(\Phi_{\ell_0+\varepsilon}) \subset \Phi_{\ell_0-\varepsilon}$. Tomando η una deformación talque $\eta_1(\Phi_b) \subset \Phi_{\ell_0+\varepsilon}$. Obtendríamos la deformación $\bar{\eta}_t \circ \eta_t$ y $\bar{\eta}_1 \circ \eta_1(\Phi_b) \subset \Phi_{\ell_0-\varepsilon}$, lo cual es un absurdo. $\square$

De la proposición anterior se sigue que K está acotado inferiormente por b y Φ satisface (D_c) para todo $c \leq b$, entonces los grupos de homología $H_q(E, \Phi_a)$ no dependen de $a \leq b$. La justificación para mostrarlo se verá varias veces, por eso lo haremos en detalle ahora.

Sea η como en la proposición anterior y $i : (E, \Phi_a) \to (E, \Phi_b)$ la inclusión. Entonces $\eta_t \circ i$ es una aplicación $(E, \Phi_a) \to (E, \Phi_b)$ para todo t, ya que $\Phi(\eta_t(u))$ es decreciente en t. Como $\eta_1 \circ i$ es homotópica a $\eta_0 \circ i = I_d$ se sigue de la invarianza homotópica del funtor homología singular que $\eta_{1*} \circ i_* = (\eta_1 \circ i)_* = I_d$. Analogamente, $i \circ \eta_1$, es homotópica a $i \circ \eta_0 = I_d$ como una aplicación que va de $(E, \Phi_b) \to (E, \Phi_b)$ y por tanto $i_* \circ \eta_{1*} = I_d$, luego $H_q(E, \Phi_a) \cong H_q(E, \Phi_b)$, notemos que es escencial considerar las homotopías anteriores para la siguiente razón no tendría sentido escribir $\eta_{\circ *} \circ i_* = (\eta_\circ \circ i)*$ pues para $t = 0, \eta_\circ$ no es una aplicación que va de $(E, \Phi_b) \to (E, \Phi_a)$ En ese sentido, si K es acotado podemos definir el grupo crítico de Φ en el infinito como $C_q(\Phi, \infty) = H_q(E, \Phi_a)$ para cualquier $a < \inf K$.

A continuación mostraremos la proposición que reune un argumento semejante a la proposición anterior y muestra que Φ satisface D_c para todo $c \notin [a,b]$ donde $a < \inf K \leq \sup \Phi(K) < b$ entonces $C_q(\Phi, \infty) \cong H_q(\Phi_b, \Phi_a)$

Proposición 2.3. Si Φ satisface (D_c) y $K_c = \varnothing$ para todo $c \geq b - \delta$ entonces dado $\varepsilon \in (0, \delta)$ existe una aplicación continua η: $E \times [0,1] \to E$ talque $\eta_0 = I_d$, $n_t(x,1) = x$ si $\Phi(x) \leq b - \varepsilon$, $\Phi(n_t(x))$ es decreciente en t para cada $x \in E$ y $n_1(E) \subset \Phi_b$

Demostración. Por la proposición 2.2 podemos encontrar para cada $k \in \mathbb{N}$ una deformación $\eta^k : E \times [0,1] \to E$ tal que $\eta_0^k = I_d, \eta_t^k(x) = \eta_k(x,t)$ si $x \in \Phi^{-1}([b-\varepsilon+k-1, b+\varepsilon+k])$, $\Phi(n_t^k(u))$ es decreciente en t y $\eta_1^k(\Phi_{b+k}) \subset \Phi_{b+k-1}$. Definamos la deformación $\eta_t = \eta_t^1 \circ \eta_t^2 \circ \eta_t^3 \circ \cdots$. Esa aplicación está bien definida y es continua, pues en $\Phi_{b+\varepsilon+k}$ es dada por $\eta_t^1 \circ \eta_t^2 \circ \eta_t^3 \circ \cdots \eta_t^k$. Luego η es la aplicación continua requerida □

Para dar un ejemplo del cálculo de grupos críticos, mencionaremos el hecho de que si u es un punto mínimo estricto de Φ, esto es $c = \Phi(u) < \Phi(v)$, $\forall v \in U$, donde U es una vecindad de u entonces $C_q(\Phi, u) = 0$ para $q \geq 1$, $C_0(\Phi, u) \cong \mathbb{R}$. En efecto, en este caso tenemos $H_q(\Phi_c \cap U, (\Phi_c \cap U)/\{u\}) = H_q(\{u\}, \varnothing)$. Un ejemplo no trivial, que será usado posteriormente más adelante.

Proposición 2.4. Supongamos que $E = V \oplus W$ es una descomposición en espacios cerrados y que el funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ satisface (D_c) para todo c suficientemente negativo, Φ es acotado inferiormente en W y que $\Phi(u) \to -\infty$ para $u \in V$ cuando $\|u\| \to \infty$. Entonces $C_k(\Phi, \infty) \neq 0$ si $k = \dim V < \infty$

Demostración. En esta proposición y en otras más adelante, usaremos el hecho de que la aplicación $E \to V \times W$, $v + w \longmapsto (u, w)$, son de la norma en $C \times W$ es dada por $\|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|$, es un homeomorfismo pues es continua y biyectiva por el teorema de la aplicación abierta su inversa es continua.
Sea $a < \inf \Phi(u)$ tal que $C_k(\Phi, \infty) \cong H_q(E, \Phi_a)$ entonces para una bola cerrada B centrada en 0, suficientemente pequeña, $\Phi_a \subset E \backslash (W \cup B)$. Además de eso, tenemos $C = \{u \in V : \|u\| \geq \mathbb{R}\} \subset \Phi_a$ para algún R suficientemente grande. Asi mismo tenemos las inclusiones.

$$i : (E, \Phi_a) \to (E, E \backslash (W \cup B)) \text{ y } j : (E, C) \to (E, \Phi_a)$$

Definimos la aplicación $H : E \times [0,1] \to E$ por $H(x,t) = h_t(x)$ y $h_t : E \to E$ dada por

$$h_t(v + w) = (1 + kt)v + (1 - t)w, \forall v + w \in V \oplus W = E$$

donde $k > 0$ es escogido de forma que h aplique $E|_{(W \cup B)}$ en C. Entonces $h_t \circ i \circ j$ define una homotopía entre $h_0 \circ i \circ j = I_d$ y $h_1 \circ i \circ j$ como aplicaciones $(E, C) \to (E, C)$ y por la invarianza homotópica $(h_1 \circ i)_* \circ j_* = I_d$, y por tanto $j_* : H_k(E, C) \to H_k(E, \Phi_a)$ es inyectiva.
Por otro lado para ver que $C_k(\Phi, \infty) \neq 0$ con $k = \dim V < \infty$ solo basta ver que $H_k(E, C) \neq 0$ y lo haremos del modo intuitivo para el caso de $k = 1$, siendo los demás casos muy similares, recurrimos a la definición de la clase de homología relativa en $H_1(E, C)$, que es dada por $z + \partial(C_2(E) + C_1(C))$ donde z es un 1-ciclo relativo y $\partial z \in C_0(C)$. Supongamos que z es un simplejo entonces tenemos dos casos.
O los extremos de z están en la misma componente de C o entonces cada extremo está en una componente diferente.

En el primer caso z es homólogo a un segmento de recta contenido en C, luego $[z] = 0$. En el segundo caso, $\pm z$ es homólogo al segmento $\overline{z} = [-x, x]$ relativamente a C donde $x \in C$ es fijo.
En efecto, $\overline{z} + [z(1), \pm x] - [\pm x, \mp x] + [\mp x, z(0)]$ es un borde. Si fuese $[\overline{z}] = 0$; tendríamos $\overline{z} = \partial c_2 + c_1$ donde c_2 es una 2-cadena en E y c_1 es una 1-cadena en C de donde $\partial \overline{z} = \partial c_1$. Esto es imposible pues la parte de $\partial \overline{z}$ contenida en una de los componentes conexas de C es un punto, sin embargo la parte de $\partial \overline{z}$ contenida en esa misma componente es un borde.
Por lo tanto $H_k(E, C) \cong R$, con $k = \dim V < \infty$. □

Definición 2.4. Sea $\pi : M \to E$ y (M, π, E) es un haz vectorial de Banach, $\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}^+$ es llamada una **estructura de Finsler** si

1. $\|\cdot\|$ es continua.
2. $\forall p \in E$, $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{E_p}$ es una norma equivalente en $E_p := \pi^{-1}(p)$
3. $\forall p_0 \in E$, para cualquier vecindad U de p_0 con $M\|_U = \pi^{-1}(U) \approx U \times E_{p_0}$; $\forall k > 1$, existe una vecindad V de E con $U \subset V$ talque
$$\frac{1}{k} \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p_0} \leq k \|\cdot\|_p \,, \ \forall p \in V$$

Ejemplo 2. Si E es un haz trivial con $U \times X$ entonces
$$\|(p, x)\| = \|x\|_X$$

Definición 2.5. Una variedad de Banach C' regular E juntamente con una estructura de Finsler en su haz tangente $T(E)$ es llamada una **variedad de Finsler**

Definición 2.6 (Campo vectorial pseudogradiente)**.** Sea E una variedad de Finsler y $\Phi : E \to \mathbb{R}$ diferenciable, $p \in E$; $X \in T_p(E)$; $X : E \to E$ es llamado un pseudogradiente si:

1. $\|X\| \leq 2 \|d\Phi(p)\|$
2. $\langle d\Phi(p), X \rangle \geq \|d\Phi(p)\|^2$:

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la dualidad en $T_p(E)$ y $\|\cdot\|$ es una estructura de Finsler.
Si $S \subset E$ y Φ es diferenciable en S, X es llamado un **campo vectorial pseudogradiente en** S si $\forall p \in S$, X_p es un pseudogradiente de Φ en p.

Lema 2.1. Supongamos que E es una variedad de Finsler y que $\Phi : E \xrightarrow{C'} \mathbb{R}$. Sea $E_1 = M \backslash K$ donde $K = \{p \in E \mid d\Phi(p) = 0\}$ es el conjunto crítico entonces $\forall p \in E_1$, existe un pseudo gradiente de Φ en p.

Demostración. Sea $p \in E_1$ entonces $\|d\Phi(p)\| \neq 0$; luego por definición $\exists X \in T_p(E)$ tal que $\|X\| = 1$ y $\langle d\Phi(p), X \rangle > \frac{2}{3} \|d\Phi(p)\|$. Sea $Y = \frac{3}{2} \|d\Phi(p)\| X$, entonces $\|Y\| =$

$\frac{3}{2}\|d\Phi(p)\| < 2\|d\Phi(p)\|$ y $\langle d\Phi(p), Y\rangle > \|d\Phi(p)\|^2$. Tomando una partición de unidad $\{\xi_u\}_{u\in E}$, es restringida a esas vecindades tenemos que

$$Y = \sum\{\xi_u(v)\}Y_u$$

es un campo pseudogradiente para Φ. $\square$

Lema 2.2. Supongamos que Φ cumple la condición de Palais-Smale, que a es un único punto crítico de Φ en $[a,b]$ y que $K_a = K\cap\Phi^{-1}(a)$ consiste de puntos aislados. Entonces Φ_a es un retrato de deformación de Φ_b.

Demostración. Por la condición de Palais-Smale es claro que K_a es compacto, es decir, consiste de un número finito de puntos. Sea X un campo pseudogradiente para Φ y sea $\sigma(t) = \sigma(t,u)$ la curva integral del campo $-\frac{-x}{\|x\|^2}$ iniciando en $u \in \Phi^{-1}(a,b]$; donde

$$\begin{cases} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{-X(\partial(t))}{\|X(\sigma(t)\|^2} \\ \sigma(0) = \alpha_0 \in E_1 \end{cases}$$

Mostraremos que σ controla Φ_a en un tiempo finito tenemos

$$\Phi(\sigma(t)-u) = \int_0^t \Phi'(\sigma(t))\left(\frac{-X(\sigma(t))}{\|X(\sigma(t))\|^2}\right)dt \le -\frac{t}{4}$$

luego

$$T_u = \sup\left\{t, \sigma(t) \in \Phi^{-1}(a,b]\right\} < \infty.$$

Hay dos posibilidades:

$$\inf_{0\le t\le T_u}\{\mathrm{dist}(\sigma(t,u),K_a)\} > 0 \text{ o } \inf_{0\le t\le T_u}\{\mathrm{dist}(\sigma(t,u),K_1)\} = 0 \tag{2.2}$$

Primer caso. Recuriremos a la condición de Palais-Smale que $\|\Phi'(\sigma(t))\| \ge$ para todo $0 \le t \le T_u$ y un cierto $\alpha > 0$. Asímismo $\|\sigma(t_2) - \sigma(t_1)\| \le \int_{t_1}^{t_2}\|\sigma'(s)\|\,ds \le \frac{1}{\alpha(t_2-t_1)}$. Por definición de distancia de un punto a un conjunto se tiene que existe

$$z = \lim_{t\to T_u}\sigma(t,u) \in \Phi^{-1}(a)\backslash K_a.$$

Segundo caso. Mostraremos que $\lim_{t\to T_u}\sigma(t) = z \in K_a$, por hipótesis

$$\inf_{0\le t\le T_u}\{\mathrm{dist}(\sigma(t,u),K_a)\} = 0$$

o sea que

$$\lim_{t\to T_u}\mathrm{dist}(\sigma(t),K_a) = 0$$

esto es claro para una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to T_u$.

Ahora, si existiese $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t'_n \to T_u$ un $\mathrm{dist}(\sigma(t'_n),K_a) \ge \varepsilon_0 > 0$ tendríamos sucesiones r_n y r'_n con $r_n < r'_n$ convergiendo a T_u tales que

$$\operatorname{dist}(\sigma(r_n), K_a) = \frac{\varepsilon_0}{2}, \operatorname{dist}(\sigma(r'_n), K_a) = \varepsilon_0 \text{ y } \frac{\varepsilon_0}{2} \leq \operatorname{dist}(\sigma(t), K_a) \leq \varepsilon_0$$

para todo $t \in [r_n, r'_n]$. Nuevamente por la condición de Palais-Smale, $\operatorname{ínf}_{r_n \leq t \leq r'_n} \|\Phi'(\sigma(t))\| > \alpha > 0$ para algún α independiente de n. Asímismo

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_0}{2} &\leq \|\sigma'(r'_n) - \sigma(r_n)\| \\
&\leq \int_{r_n}^{r'_n} \|\sigma'(s)\|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\alpha}(r'_n - r_n) \to 0
\end{aligned}$$

entonces $\varepsilon_0 = 0$ es una contradicción. Tenemos por lo tanto $\operatorname{lím}_{t \to T_u} \Phi'(\sigma(t)) = 0$, se verifica fácilmente que el conjunto límite de la órbita σ está contenido en K_a y de hecho es dado por un único punto z.

Ahora debemos probar que la aplicación $u \to T_u$ es continua. En el primer caso de (2.2), tenemos que $\Phi(\sigma(T_u, u)) = a$ y

$$\frac{d}{dt}\Phi(\sigma(t,u)) = \Phi'(\sigma(T_u,u))\left(\frac{-X(\sigma(T_u,u))}{\|X(\sigma(T_u,u))\|^2}\right) < \frac{1}{4}$$

luego la continuidad de T_u recurre del Teorema de la función implícita. En el caso $z = \operatorname{lím}_{t \to T_u} \sigma(t)$, $z \in K_a$, si $v \to T_v$ no fuese continua en u, tendríamos una sucesión $v_n \to u$ talque $T_{v_n} \geq T_u + \varepsilon_0$ para algún $\varepsilon_0 > 0$, pero

$$\begin{aligned}
\Phi(\sigma(T_v - \varepsilon, v)) - \Phi(\sigma(t,v)) &\leq \int_t^{T_v - \varepsilon} \sigma'(s,v) ds \\
&\leq -\frac{1}{4}(T_v - \varepsilon - t)
\end{aligned}$$

Por tanto $\Phi(\sigma(t,v)) \geq a + \frac{1}{4}(T_v - t)$
Por la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que

$$\Phi(\sigma(T_u - \varepsilon, v_n)) \to \sigma(T_u - \varepsilon, u)$$

y así mismo

$$\begin{aligned}
\Phi(\sigma(T_u - \varepsilon, u)) &= \operatorname{lím}_{n \to \infty} \Phi(\sigma(T_u - \varepsilon, v_n)) \\
&\geq \operatorname{lím}_{n \to \infty} \left(a + \frac{1}{4}(T_{v_n} - T_u + \varepsilon)\right) \\
&\geq a + \frac{1}{4}(\varepsilon_0 + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, obtenemos $a \geq a + \frac{\varepsilon_0}{4}$ un absurdo. En el caso $T_{v_n} \leq T_u - \varepsilon_0$ es similar.

Ahora si podemos definir una aplicación

$$\eta : [0,1] \times \Phi_b \to \Phi_b$$

por

$$\eta(t,u) = \begin{cases} \sigma(tT_u, u) & , u \in \Phi^{-1}(a,b] \\ u & , u \in \Phi_a \end{cases}$$

donde es claro que $\sigma(T_u, u) = \lim_{t \to T_u} \sigma(t,u)$. Esto es un retracto por deformación de Φ_b en Φ_a pues $\eta(0,u) = \sigma(0,u)$ y $\eta(1,u) = \sigma(T_u,u)$. Falta ver la continuidad. En $[0,1] \times \Phi_a$ vale $\eta(t,u) = u$. En $[0,1) \times \Phi^{-1}(a,b]$ la continuidad de η se sigue de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para verificar la continuidad en $\{1\} \times \Phi^{-1}(a,b]$, por el absurdo supongamos que existen $\varepsilon > 0$, $v_n \to u \in \Phi^{-1}(a,b]$ y $t_n \to T_u$ tales que $\|\sigma(t_n, v_n) - z\| \geq \varepsilon$ donde $z = \sigma(T_u, u)$. Podemos suponer que $\overline{B}(z,\varepsilon) \cap K_a \subset \{z\}$ y de aquí cuando $s \to T_u$ y $v \to u$ entonces $\|\sigma(s,u) - \sigma(T_u,u)\| \to 0$ y $\|\sigma(t,v) - \sigma(t,u)\| \to 0$ para cada $t \in [0,1)$ fijo , tenemos al menos una subsucesión $t'_n \to T_u$ tal que $\sigma(t'_n, v_n) \to z$, donde podemos asumir que $t_n \to t'_n$ y obtenemos para todo n suficientemente grande que $t_n \leq r_n \leq r'_n < t'_n$ tales que

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \|\sigma(t, v_n) - z\| \leq \varepsilon \text{ para } t \in [r_n, r'_n]$$

$\|\sigma(r_n, v_n) - z\| = \varepsilon$, $\|\sigma(r'_n, v_n) - z\| = \frac{z}{2}$, luego por la condición de Palais-Smale $\|\Phi^{-1}(\sigma(t, v_n))\| \geq \beta > 0$ para $t \in [r_n, r'_n]$ y

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \|\sigma(r'_n, v_n) - \sigma(r_n, v_n)\| \leq \int_{r'_n}^{r_n} \left\|\sigma^{-1}(s, v_n)\right\| ds \leq \frac{1}{\beta}(r_n - r'_n)$$

y $r_n - r'_n \to 0$ lo cual es un absurdo

Falta analizar la continuidad de η en $[0,1] \times \Phi^{-1}(a)$ este caso es análogo al anterior, luego Φ_a es un retracto de deformación de Φ_b

□

2.4. Contractibilidad de la esfera de dimensión infinita

Definición 2.7. Si una función f es homotópica a una función constante, se dice que **nulo homotópica** y se escribe $f \simeq x_0$.
Un espacio X es contractil o contraible si es homotópica a un punto x_0 o equivalentemente la aplicación $i_x : X \to X$ es nulo homotópica. Es decir existe una aplicación continua $H : X \times [0,1]$ (llamada homotopía) y un punto $x_0 \in X$ tales que para todo $x \in X$

- $H(x,0) = x$
- $H(x,1) = x_0$

Ejemplo 3.

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ es contractil o contraible mediante la Homotopía $H : B^n \times [0,1] \to B^n$ definida por $H(x,t) = (1-t)x$ entonces $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = 0$ luego B^n se contrae al punto $x_0 = 0$.
- Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contractil.
- Un espacio no contraíble es la esfera de dimensión finita $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$. Pues la intuición nos dice que las tendríamos que romper para poderlas deformar a un punto. Sin embargo si la esfera tiene dimensión infinita, el espacio adecuado para poderlas deformar a un punto es ℓ_2

Si E es un espacio vectorial normado, una norma $|\cdot|$, se dice que $S_E = \{x \in E : |x| = 1\}$ es a esfera unitaria de E y $B_E = \{x \in E : |x| \leq 1\}$ es la bola unitaria en E. Tenemos una relación con el teorema del punto fijo. Si E es un espacio vectorial normado, entonces S_E es contraible si y solo si existe una función continua $F : B_E \to B_E$ sin puntos fijos comenzamos con datos históricos sobre la contractibilidad de esferas de dimensión infinita relacionando el teorema del punto fijo de Brouwer sobre bolas de espacios vectoriales normados de dimensión infinita, varios autores han estudiado la contractibilidad de las esferas infinito dimensionales.
En 1935 Jean Leray [5] probó que la esfera unitaria del espacio $C[0,1]$ con la norma del máximo es contraíble. Luego Shizo Kakutani [6] demuestra que si E es un espacio de Hilbert entonces existe un homeomorfismo de B_E a B_E sin puntos fijos. En 1951 James Dugundji [7] prueba lo siguiente.

Si E es un espacio normado y $B_E = \{x \in E : |x| \leq 1\}$. Una condición necesaria y suficiente para que toda la función continua $F : B_E \to B_E$ tenga un punto fijo es que B_E sea compacta. Así B_{ℓ_2} no es compacta, puesto que la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{\ell_2}$ formado por la base ortonormal $e_n = (0,0,0,\ldots,1,0,0,\ldots)$, $n \in \mathbb{N}$ no tiene ninguna subsucesión convergente. Sabemos que las esferas infinito dimensionales no son compactas con la topología de la norma, por ende las esferas infinito dimensionales son contraibles. Es por eso que si E es un espacio de Banach infinito dimensional se tiene que S_E y B_E son homeomorfas.

Lema 2.3. $\ell_p \backslash \{0\}$ es contractil para $1 \leq p < \infty$ donde ℓ_p es el espacio de Banach formado por todas las sucesiones $x = \{x^1, x^2, x^3, \ldots\}$ de números reales tales que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p} < \infty$$

Demostración. Basta probar que $\sigma : \ell_p \backslash \{0\} \to \ell_p \backslash \{0\}$ dado por

$$(x^1, x^2, x^3, \ldots) \mapsto (0, x^1, x^2, x^3, \ldots)$$

es homotópica a la aplicación identidad, pues

$$(x^1, x^2, x^3, \cdots) \mapsto ((1-t), tx^1, tx^2, \cdots)$$

para $0 \leq t \leq 1$ define una homotopía entre σ y una aplicación constante, luego definimos

$$\eta^k : (\ell_p \backslash \{0\}) \times [0,1] \to \ell_p \backslash \{0\}$$

por

$$\eta^k(x^1, x^2, x^3, \ldots) = (x^1, \ldots, x^{k-1}, tx^k, (1-t)x^k, x^{k+1}, \ldots)$$

entonces tenemos la homotopía

$$\eta : (\ell \backslash \{0\}) \times [0,1] \to \ell_p \backslash \{0\}$$

dada por

$$\eta_t(x) = \eta(x,t) = \begin{cases} \eta^k_{(k+1)kt-(k^2-1)}(x), & \text{si } t \in \left[\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}\right] \\ x, & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

entonces $\eta_0 = n'_0 = \sigma$ y η_t continua en $(\ell_p \backslash \{0\}) \times [0,1)$ pues si $x_m \to x$ en ℓ_p y $t_m \to 1$ entonces $\eta_{t_m}(x_m) \to x$ en ℓ_p. □

Proposición 2.5. $W_0^{1,p} \backslash \{0\}$ es contractil

Demostración. Sea $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión de funciones con norma 1 y soportes disjuntos dos a dos. La aplicación $\{\alpha_n\} \in \ell_p \mapsto \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una isometría lineal luego su imagen V es un subespacio cerrado. Mostraremos que V posee un complemento cerrado En efecto, sea $W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker \Delta_p e_n$, es claro que W es cerrado y que $V \cap W = \{0\}$ luego falta mostrar que $V + W = W_0^{1,0}(\Omega)$.

En efecto, dada $u \in W_0^{1,0}(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \geq \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} e_n} |\nabla u|^p dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\operatorname{Supp} e_n} |\nabla u|^p dx;$$

como $\|\Delta p e_n\| = 1$, tenemos

$$|\Delta e_n u| \leq \left(\int_{\operatorname{Supp}\ e_n} |\nabla\ u|^p dx \right)^{1/p}$$

y por la desigualdad anterior, hacemos $\alpha_n = (\Delta_p e_n)u$, tenemos $\{\alpha_n\} \in \ell_p$. Entonces es claro que

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n + \left(u - \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n \right) \in V + W.$$

Afirmamos que el espacio $V \oplus W \backslash \{0\}$ puede ser deformado en $V \backslash \{0\}$, en efecto, definimos la aplicación $\eta_t : V \oplus W \backslash \{0\} \to V \oplus W \backslash \{0\}$ por

$$\left(\sum \alpha_n e_n + w \right) \in V \oplus W \mapsto \sum \alpha_n e_{n+1} + t \|w\| e_1 + (1-t)w$$

entonces n_0 es homotópica a la aplicación identidad pues la aplicación σ del Lema 2.3

y η_1 tiene imagen en $V\backslash\{0\}$, luego por el Lema 2.3 $W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ es contractil. $\square$

Proposición 2.6. S_{ℓ_2} es contraíble.

Demostración. Probaremos que existe una homotopia $H : S_{\ell_2} \times [0,1] \to S_{\ell_2}$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = (1,0,0,\ldots)$. Primero deformamos la esfera a su ecuador y luego llevamos al ecuador al punto $(1,0,0,\ldots)$. En efecto, definimos el operador $T : S_{\ell_2} \to$ Ecuador dada por $T(x_1,x_2,x_3,\ldots) = (0,x_1,x_2,\ldots)$ entonces S_{ℓ_2} es homeomorfa a $T(S_{\ell_2})$, luego definimos la función $H_1 : S_{\ell_2} \times [0,1] \to S_{\ell_2}$ dada por,

$$H_1(x,t) = u_x \operatorname{sen}(S_x t) + x\cos(S_x t)$$

donde

$$u_x = \frac{T(x) - \langle x, T(x)\rangle x}{\sqrt{1-\langle x, T(x)\rangle^2}} \text{ y } S_x = \arccos\langle x, T(x)\rangle.$$

Aquí $|\langle x, T(x)\rangle| \neq 1$, pues de lo contrario x sería múltiplo de $T(x)$ y por tanto $0 = x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$ que es un absurdo ya que $x \in S_{\ell_2}$. Para la segunda parte consideraremos la función $H_2 : S_{\ell_2} \times [0,1] \to S_{\ell_2}$ definida por

$$H_2(x,t) = x_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + T(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

donde $x_0 = (1,0,0,\ldots)$, luego $\langle x_0, T(x)\rangle = 0$ y como $|T(x)| = 1$ se sigue que $H_2(x.t) \in S_{\ell_2}$ y H_2 es continua. Finalmente definimos

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_2(x,2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

luego $H(x,0) = H_1(x,0) = x$ y $H(x,1) = H_2(x,1) = H_2(x,1) = x_0$ $\square$

Proposición 2.7. S^∞ es contraíble.

Demostración. En efecto, mostraremos una homotopía de la aplicación identidad de S^∞ a la aplicación constante que podemos construirlo de la siguiente forma. Primero definimos $H : \mathbb{R}^\infty\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^\infty\backslash\{0\}$, donde $o = (0,0,\ldots)$ y

$$H((x_1,x_2,\ldots),t) = (1-t)(x_1,x_2,\ldots) + t(0,x_1,x_2,\ldots)$$

Haciendo $f_t(x_1,x_2,\ldots) = H((x_1,x_2,\ldots),t)$ así $\frac{f_t}{|f_t|}$ da una homotopía entre la aplicación identidad de S^∞ a la aplicación $(x_1,x_2,\ldots) \mapsto (0,x_1,x_2,\ldots)$. Entonces una homotopía de está aplicación a la aplicación constante $(x_1,x_2,\ldots) \mapsto (0,x_1,x_2,\ldots)$ es dada por

$$G((x_1,x_2,\ldots),t) = \frac{g_t(x_1,x_2,\ldots)}{|g_t(x_1,x_2,\ldots)|}$$

donde

$$g_t(x_1,x_2,\ldots) = (1-t)(0,x_1,x_2,\ldots) + t(1,0,0,\ldots)$$

$\square$

Observación 9. Así vemos que los espacios contractibles son caracterizados por el tipo de homotopía. Luego por el teorema de la Topología algebraica, ver E. Spanier [1], un espacio es contractible si y solo si tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio puntual.

Capítulo 3

Existencia de soluciones de ecuaciones semilineales con el p-Laplaciano

Consideremos ahora ver Shibo Liu [8] el problema de Dirichlet para el p-Laplaciano ($p > 1$)

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ con frontera regular $\partial\Omega$ y $-\Delta_p u$ es el operador de p-Laplaciano definido por $\Delta_p u = div(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$. Asumamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory con crecimiento subcrítico, esto es X.

F1) La desigualdad $|f(x,u)| \leq C(1 + |u|^{q+1})$ sostiene para todo $u \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ y para alguna constante positiva C, donde $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ si $N \geq p+1$ y $1 \geq q < \infty$ si $1 \leq N < p$ conoceremos que las soluciones débiles $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1) son los puntos críticos del C^1 funcional.

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int |\nabla u|^p dx - \int F(x,u)dx$$

donde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$. Sean λ_1 y λ_2 el primer y segundo autovalor de $-\Delta_p$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Sabemos que $\lambda_1 > 0$ es un autovalor simple y que $\sigma(-\Delta_p) \cap (\lambda_1, \lambda_2) = \varnothing$, donde $\sigma(-\Delta_p)$ es el espectro de $-\Delta_p$.

Asumiremos las siguientes condiciones.

F2) Existen $r > 0$, $\overline{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_2)$ tal que $|u| \leq r$ implica $\lambda_1|u|^p \leq pF(x,u) \leq \overline{\lambda}|u|^p$

F3) Existen $\theta > p, M > 0$ tal que $|u| \geq M$ implica

$$0 < \theta F(x,u) \leq uf(x,u).$$

Ahora miremos la situación del resultado especial.

Teorema 3.1. Asumamos (F1), (F2) y (F3). Entonces (3.1) tiene soluciones débiles no triviales en $W_0^{1,p}(\Omega)$

En este trabajo usaremos la Teoría de Morse para mostrar la existencia de soluciones y obtener la solubilidad de la ecuación con el p-Laplaciano. En esta sección daremos la prueba del Teorema 3.1. Denotemos como E el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, y $\|\cdot\|$ denota la norma en E. Para Φ una función continua Fréchet diferenciable de E en $\mathbb{R}$. Sea $\Phi'(u)$ denota su derivada de Fréchet. Estableceremos en esta sección que las soluciones débiles de 3.1 son los puntos críticos del C^1 funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int |\nabla u|^p dx - \int F(x,u)dx$$

Para eso encontraremos un punto crítico no trivial del funcional Φ. Primero estableceremos los siguientes Lemas.

Lema 3.1. Bajo las condiciones (F1) y (F3) el funcional Φ satisface la condición de Palais-Smale.

Demostración. Asumaremos que $(u_n) \subset E, |\Phi(u_n)| \leq B$. para algún $B \in \mathbb{R}^+$ y $\Phi'(u_n) \to 0$. Denotamos con $d := \sup_n \Phi(u_n)$, por (F3) y $d \geq \Phi(u_n)$, $|\Phi'(u_n)| \leq 1$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \langle \Phi'(v_n), v_n\rangle \leq \|u_n\|, \forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\theta d + \|u_n\| &\geq \theta\Phi(u_n) - \langle \Phi'(u_n), u_n\rangle \\
&= \theta\left(\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right) + \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \|u\|^p \\
&= \left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p - \int_\Omega \left[\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n\right] dx \\
&\geq \left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p - \int_{\Omega\cap|u_n|\geq M}\left[\underbrace{\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n}_{\geq 0}\right] dx \\
&\qquad - \int_{\Omega\cap|u_n|\leq M}\left[\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n\right] dx \\
&\geq \left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p - \int_{\Omega\cap|u_n|\leq M}\left[\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n\right] dx
\end{aligned}$$

observaremos así que

$$\int_{\Omega\cap|u_n|\leq M}\left[\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n\right] dx \leq (\theta c + 1)\left(M + M^q\right)|\Omega| \equiv D$$

luego

$$\theta d + \|u_n\| \geq \left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p - D \tag{3.2}$$

De aquí se obtiene que $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. De lo contrario existe una subsucesión $(\|u_{n_k}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ donde $\|u_{n_k}\| \to \infty$ y de 3.2

$$\frac{\theta d}{\|u_{n_k}\|} + \frac{1}{\|u_{n_k}\|^{p-1}} \geq \left(\frac{\theta}{p} - 1\right) - \frac{D}{\|u_{n_k}\|^{p}}$$

Entonces $0 \geq \frac{\theta}{p} - 1$, lo que es una contradicción, pues $\frac{\theta}{p} > 1$. Como $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $E = W_0^{1,p}$ es reflexivo existe una subsucesión así denotada $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ en } E \tag{3.3}$$

Ahora probaremos que existe una subsecesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \to u$ en $E = W_0^{1,p}(\Omega)$. En efecto, $W_0^{1,p} \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq p^*$, entonces

$$u_{n_k} \to u \text{ en } L^q(\Omega),\ 1 \leq q \leq p^*$$

y

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \text{ c.t.p en } \Omega$$

y existen $g \in L'(\Omega)$ y $h \in L^q(\Omega)$ tales que $|u_{n_k}(x)| < g(x)$ c.t.p. en $\Omega\,\forall\, k$, $|u_{n_k}| \leq h(x)$ c.t.p en $\Omega\,\forall\, k$.
De la condición de Caratheodory sobre f

$$f(x, u_{n_k})u_{n_k} \to f(x, u)u \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Además

$$\begin{aligned} |f(x, u_{n_k})| &\leq |f(x, u_{n_k})||u_{n_k}| \leq c\,(|u_{n_k}| + |u_{n_k}|^q) \\ &\leq c(|q| + |h|^q) \in L'(\Omega) \end{aligned}$$

Así por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(x, u_{n_k})u_{n_k}dx \to \int_\Omega f(x, u)udx$$

Razonando similarmente, obtenemos

$$\int_\Omega f(x, u_{n_k})udx \to \int_\Omega f(x, u)udx$$

consideramos ahora.

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle - \langle \Phi'(u_{n_k}), u\rangle &= \langle \Phi'(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle \\ \langle \Phi'(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle &= \langle \Phi'(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle - \langle \Phi'(u_{n_k}), u\rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^p dx - \int_\Omega f(x, u_{n_k})u_{n_k}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla u dx + \int_\Omega f(x,u_{n_k}) u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\left(\nabla u_{n_k} - \nabla u\right) dx \\
&- \int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u) dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla_{u_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\left(\nabla u_{n_k} - \nabla u\right) dx - \int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u) \\
&+ \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\left(\nabla u_{n_k} - \nabla u\right) dx
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
&c\int_\Omega |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^p dx \le \int_\Omega \left(|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\left(\nabla u_{n_k} - \nabla u\right) dx \\
&= \langle \Phi'(u_{n_k}, u_{n_k} - u)\rangle + \int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u)dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_{n_k} - \nabla u)
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
|\nabla u|^{p-2}\nabla u \in L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),
$$

de las convergencias anteriores y (3.3), los términos de la derecha de la anterior desigualdad convergen a cero. Luego

$$
\int_\Omega |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^p \to 0
$$

es decir $u_{n_k} \to u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto concluye el Lema (3.1).

□

Ahora probaremos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{k_0}(\Phi, 0) \neq 0$. Para ello requerimos del siguiente resultado

Lema 3.2. J.Q. Liu, Jiabao Su [9]. Bajo las hipotesis (F2), asumamos que el funcional Φ tiene un enlazamiento (linking) local en el origen con respecto a $E = V \oplus W$, $k = \dim(V) < \infty$, esto es, existe $\rho > 0$ pequeño tal que

$$
\left|\begin{array}{ll} \Phi(u) \le 0; & u \in V, \|u\| \le \rho \\ \Phi(u) > 0, & u \in W, 0 < \|u\| \le \rho \end{array}\right.
$$

Entonces $C_k(\Phi, 0) \neq 0$, esto es 0 un punto crítico homológico no trivial de Φ

Lema 3.3. Bajo las hipótesis (F2), 0 es punto crítico de Φ y $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$, $C_k(\Phi, 0) \neq 0$, esto es, 0 es un punto cŕitico homológico, no trivial de Φ

Como $f(x,0) = 0$, la función cero 0 es un punto crítico de Φ. Así solo resta probar que $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{k_0}(\Phi, 0) \neq 0$. Sea $V = \operatorname{span}(\Phi_1) = [\Phi_1] = \langle \Phi_1 \rangle$, el espacio generado por $\Phi_1 > 0$ (asumido así sin pérdida de generalidad), Φ el primer auto vector del problema

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} & , \text{en } \Omega \\ u = 0 & , \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

con $\|\Phi_1\| = 1$.

Por resultados del Análisis Funcional, existe el subespacio complementario W tal que $E = W_0^{1,p}(\Omega) = V \oplus W$. Observemos, que como λ_1 el correspondiente autovalor asociado a Φ está caracterizado por

$$\lambda_1 = \text{ínf} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |\Phi|^p dx} \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \right\}$$

Podemos escoger un λ_2 que satisface

$$\int_\Omega |\nabla u| dx \geq \lambda_2 \int_\Omega |u|^2 dx$$

- Fijemos ahora $v \in V$. Luego $v = t\phi_1$, $t \in \mathbb{R}$. Observemos que $\|v\| = \|t\phi_1\| \leq \rho \Leftrightarrow |t| \leq \rho$, con $0 < \rho$ pequeño, obtenemos:

  $$|t\phi_1(x)| = |t||\phi_1(x)| \leq |t||\phi_1|_{L^\infty} \leq \rho|\phi_1|_{L^\infty} = r > 0, \forall x \in \Omega$$

  Luego de (F2)

  $$\begin{aligned} \Phi(v) = \Phi(t\phi_1) &= \frac{1}{p} \|t\phi_1\|^p - \int_\Omega F(x, t\phi_1(x)) dx \\ &\leq \frac{t^p}{p} \|\phi_1\|^p - \frac{\lambda_1 t^p}{p} \int_\Omega |\phi_1(x)|^p dx \\ &= \frac{t^p}{p} \left[\|\phi_1\|^p - \lambda_1 \int_\Omega |\phi_1(x)|^p dx \right] = 0 \end{aligned}$$

  Luego $\Phi(v) \leq 0$, $\|v\| \leq \rho$, $v \in V = [\phi_1] = \langle \phi_1 \rangle$

- De (F1) y (F2), tenemos

  $$F(x, u) \leq \frac{\widehat{\lambda}}{p} |u|^p + c|u|^s$$

para cada $u \in W$; $q < s < p^*$, alguna $c > 0$. Luego para $u \in W$ se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\widehat{\lambda}}{p}\int_\Omega |u|^p dx - c\int_\Omega |u|^s dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\widehat{\lambda}}{p\widehat{\lambda}_2}\|u\|^p - \overline{c}\left(\int_\Omega |\nabla u|\right)^s\end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{\widehat{\lambda}}{p\lambda_2}\right)\|u\|^p - c\|u\|^s \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\widehat{\lambda}}{\lambda_2}\right)\|u\|^p - c\|u\|^s\end{aligned}$$

Fijando $0 < \rho$ suficientemente pequeño y viendo $\widehat{\lambda} < \lambda_2$ seguimos que $\Phi(u) > 0$, $\forall u \in W$ y $0 < \|u\| \leq \rho$. Por tanto, aplicando el Lema 3.2 del "Linking" obtenemos la existencia de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{k_0}(\Phi, 0) \neq 0$. Ahora probaremos que $\Phi_a \cong S^\infty$ para $a < -A$ donde S^∞ es la esfera infinita en $E = W_0^{1,p}(\Omega)$ y como $\dim W_0^{1,p}(\Omega) = +\infty$, y siendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ y S^∞ contractibles y por propiedad de Homología se tiene

$$C_q(\Phi, \infty) = H_q\left(W_0^{1,p}(\Omega), \Phi_a\right) = H_q\left(W_0^{1,p}(\Omega), S^\infty\right)$$

Afirmación 3.1. El cero es un punto crítico aislado

Demostración. Por el absurdo, supongamos que 0 no es punto critico aislado, entonces $0 \notin D_{0,\delta},\ \forall \delta > 0$, donde

$$\Phi(0) = \frac{1}{p}\int |\nabla 0|^2 dx - \int F(x,0)dx$$

y

$$F(x,0) = \int_0^0 f(x,t)dt = 0$$

entonces $\Phi(0) = 0$.
Por definición de $D_{0,\delta} : B(0,\delta) \cap K \neq \{0\} \to 0 \notin B(0,\delta) \cap K$, pero $\Phi'(0) = 0$ y $\Phi(0) = 0$, entonces $0 \in K_c \subset K$, luego $0 \in K$ y como $0 \in B(0,\delta)$, implica que $0 \in B(0,\delta) \cap K$, lo cual es una contradicción, luego 0 es un punto critico aislado. $\square$

Lema 3.4. Bajo las hipótesis (F3) existe una constante $A > 0$ tal que $\Phi_a \cong S^\infty$ para $a < -A$ donde S^∞ es la esfera unitaria en E.

Afirmación 3.2.

$$F(x,t) \geq c_1|t|^\theta \text{ para } |t| \geq M \tag{3.4}$$

Demostración. En efecto, observamos que $F(x,t) \neq 0$ y $t \neq 0$. Tenemos los siguientes casos

Caso 1: Si $t \geq M+1$, luego

$$0 < \frac{\theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)} \Rightarrow \int_{M+1}^{t} \frac{\theta}{s} ds \leq \int_{M+1}^{t} \frac{F'(x,s)}{F(x,s)} ds$$

Luego $\theta \ln(t) - \theta \ln(M+1) \leq \ln(F(x,t)) - \ln(F(x,M+1))$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{t}{M+1}\right)^{\theta} \leq \ln\left(\frac{F(x,t)}{F(x,M+1)}\right), \forall\ t \geq M+1, x \in \bar{\Omega}$$

Como el logaritmo es creciente se tiene

$$\left(\frac{t}{M+1}\right)^{\theta} \leq \frac{F(x,t)}{F(x,M+1)}, \forall\ t \geq M+1, x \in \bar{\Omega}$$

Así

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,M+1)t^{\theta}}{(M+1)^{\theta}}; \forall\ t \geq M+1, x \in \bar{\Omega}$$

Sea $m = \operatorname{mín}_{x\in\bar{\Omega}} F(x,M+1) > 0$ ($F(\cdot, M+1)$ continua y $\bar{\Omega}$ compacto) entonces $F(x,t) \geq \bar{c}_1 t^{\theta}, \forall\ t \geq M+1$, $x \in \bar{\Omega}$, $\bar{c}_1 = \frac{m}{(M+1)^{\theta}} > 0$

Caso 2: $t \leq -(M+1)$, similarmente de (F3) se obtiene

$$\ln(F(x,-(M+1))) - \ln(F(x,t)) \leq \theta \ln|-(M+1)| - \theta \ln|t|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{-(M+1)}{t}\right|^{\theta} \geq \ln\left|\frac{F(x,-(M+1))}{F(x,t)}\right|, \forall\ t \leq -(M+1), X \in \bar{\Omega},$$

lo que implica $F(x,t) \geq c_2|t|^{\theta}$, donde $c_2 = \frac{k}{(M+1)^{\theta}}$, $k = \operatorname{mín} F(\cdot, -(M+1))$, $x \in \bar{\Omega}$

Basta considerar los casos 1 y 2 $c_1 = \operatorname{mín}\{\bar{c}_1, k\}$, resulta

$$F(x,t) \geq c_1|t|^{\theta}, \forall\ |t| \geq M+1$$

□

Afirmación 3.3. Para $u \in S^{\infty}$, tenemos que $\Phi(tu) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$

Demostración. Para $u \in S^\infty$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\Phi(tu) &= \frac{1}{p}\int |\nabla(tu)|^p dx - \int F(x,tu)dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega |t|^p|\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(x,tu)dx \\
&= \frac{|t|^p}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,tu)dx \\
&= \frac{|t|^p}{p} - \int_{|tu|\geq M} F(x,tu)dx - \int_{|tu|<M} F(x,tu)dx, \|u\| = 1
\end{aligned}$$

Usando (3.4)

$$\Phi(tu) \leq \frac{|t|^p}{p} - c|t|^\theta \int_\Omega |u|^\theta dx - \int_{|tu|<M} F(x,tu)dx$$

De ahí del hecho que $\theta > p$, obtenemos

$$\Phi(tu) \leq \frac{|t|^p}{p} - \widehat{c}|t|^\theta + k \to -\infty$$

cuando $|t| \to \infty$ $\square$

Afirmación 3.4. *Existe $A > 0$ tal que para $a < -A$ y $\Phi(tu) < 0$*

Demostración. Definimos

$$A := \left(1 + \frac{1}{p}\right) M|\Omega| \max_{\Omega\times[-M,M]} |f(x,u)| + 1.$$

Usando (F3) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(x,v) - \frac{1}{p}\int_\Omega f(x,v)v = &\int_{|v|\geq M} F(x,u) + \int_{|v|\leq M} F(x,v) \\
&- \frac{1}{p}\int_{|v|\geq M} f(x,v)v - \frac{1}{p}\int_{|v|\leq M} f(x,v)v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq &\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)\int_{|v|\geq M} vf(x,v) + \int_{|v|\leq M} F(x,v) \\
&- \frac{1}{p}\int_{|v|\leq M} vf(x,v)
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $|t| \leq M$

$$-\frac{1}{p}f(x,t)t \leq \left|\frac{1}{p}f(x,t)t\right| \leq \frac{|t|}{p}|f(x,t)| \leq \frac{M}{p}|f(x,t)|$$

luego:
$$\frac{1}{p}f(x,t)t \leq \frac{M}{p} \max_{\Omega\times[-M,M]} |f(x,t)|$$
Para $0 < t < M$,
$$\begin{aligned}|F(x,t)| &= \left|\int_0^t f(x,s)ds\right| = \int_0^t f(x,s)ds \\ &\leq t \max |f(x,t)| \leq M \max |f(x,t)|\end{aligned}$$
Entonces
$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,v) - \frac{1}{p}\int_\Omega f(x,v)v &\leq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)\int_{|v|\geq M} f(x,v)v \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{p}\right)|\Omega| M \max |f(x,t)|\end{aligned}$$
De donde
$$\int_\Omega F(x,v) - \frac{1}{p}\int_\Omega f(x,v)v \leq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)\int_{|v|\geq M} f(x,v)v + A - 1$$
Asímismo para $a < -A$ y $u \in S^\infty$
$$\Phi(tu) = \frac{|t|^p}{p} - \int F(x,tu)dx \leq a$$
Tenemos
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(tu) &= \langle \Phi'(tu), u\rangle = |t|^{p-2} - \int uf(x,tu) \\ &\leq \frac{p}{t}\left(\int F(x,tu) - \frac{1}{p}\int tuf(x,tu) + a\right) \\ &\leq \frac{p}{t}\left\{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)\int_{|tu|\geq M} tuf(x,tu) + A - 1 + a\right\} \\ &\leq \frac{p}{t}\left\{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)\int_{|tu|\geq M} tuf(x,tu) - 1\right\} \\ &\leq \frac{p}{t}\left\{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)c_1\theta\int_{|tu|\geq M} |tu|^\theta - 1\right\} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi(tu) < 0\end{aligned}$$
luego la aplicación $t \to \Phi(tu)$ es monótona decreciente, luego por el teorema de la función implícita existe un único $T \in C(S^\infty, \mathbb{R})$ para $u \in E\backslash\{0\}$ es decir existe un único $T(u) > 0$ tal que $\Phi(T(u)u) = a, \forall\ u \in S^\infty$ luego podemos definir una función

continua $T : S^\infty \to \mathbb{R}$ satisfaciendo $\Phi(T(u)u) = a$ y por ende definimos una función continua

$$\begin{aligned} \widehat{T} :& E\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto& \widehat{T}(u) = \frac{1}{\|u\|} T\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \end{aligned}$$

Entonces $\widehat{T} \in C(E\backslash\{0\}, \mathbb{R}), \forall u \in E\backslash\{0\}, \Phi\left(\widehat{T}(u)u\right) = a$. Además de eso $\Phi(u) = a$, entonces $\widehat{T}(u) = 1$.

Ahora definamos la función $\bar{T} : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$\bar{T}(u) := \begin{cases} \widehat{T}(u) & \text{si } \Phi(u) \geq a \\ 1 & \text{si } \Phi(u) \leq a \end{cases}$$

Desde que $\Phi(u) = a$ implica $\widehat{T}(u) = 1$ concluimos que $\bar{T} \in C(E\backslash\{0\}, \mathbb{R})$.
Finalmente, definimos la aplicación $\eta : E\backslash\{0\} \times [0, 1] \to E\backslash\{0\}$ por $\eta(u, s) = (1-s)u + s\bar{T}(u)u$.
Fácilmente se ve que η es un retracto de deformación fuerte de $E\backslash\{0\}$ en Φ_a es decir $\eta(\cdot, 0) = I_d(\cdot), \eta(E\backslash\{0\}, 1) \subset \Phi_a$ y $\eta(t, \cdot)|_{\Phi_a} = I_d|_{\Phi_a}$. Por lo tanto $\Phi_a \cong E\backslash\{0\} \cong S^\infty$ y S^∞ se contrae a un punto, entonces $H_1(E, \Phi_a) = H_1(E, S^\infty) = 0$ □

Lema 3.5. Sea $Y \subset B \subset A \subset X$ espacios topológicos, $q \in \mathbb{Z}$ si $H_q(A, B) \neq 0$ y $H_q(X, Y) = 0$ entonces $H_{q+1}(X, A) \neq 0$ o $H_{q-1}(B, Y) \neq 0$

Demostración. Ver K. Perera [2]
Suponga que $H_{q+1}(X, A) = 0$. Como $H_q(X, Y)$ es tambien trivial, de la siguiente porción de la sucesioń exacta del triple (X, A, Y) se sigue que $H_q(A, Y) = 0$:

$$H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A, Y) \xrightarrow{i_*} H_q(X, Y)$$

desde que $H_q(A, B) \neq 0$, se sigue de la siguiente porción de la sucesión exacta del triple (A, B, Y) que $H_{q-1}(B, Y) \neq 0$:

$$H_q(A, Y) \xrightarrow{j_*} H_q(A, B) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(B, Y)$$

□

Teorema 3.2. Asumamos que Φ satisface la condición de (PS), que tiene solo valores críticos aislados con cada valor crítico correspondiente a un número finito de puntos críticos.
Supongamos que existe un punto crítico u_0 de Φ, $\Phi(u_0) = c$ con $C_q(\Phi, u_0) \neq 0$ para algún $q \geq 0$ y valores regulares a, b de Φ, $a < c < b$ tal que $H_q(\Phi_b, \Phi_a) = 0$. Entonces Φ tiene un punto crítico u que verifica

$$c < \Phi(u) < b \quad \text{y} \quad C_{q+1}(\Phi, u) \neq 0$$

o

$$a < \Phi(u) < c \quad \text{ y } \quad C_{q-1}(\Phi, u) \neq 0$$

Demostración. Como $c - a > 0$ y $b - c > 0$ entonces tomamos ε tal que $0 < \epsilon < \min\{c - a, b - c\}$. De $\varepsilon < c - a$ y $\varepsilon < b - c$ entonces $a < c - \varepsilon$ y $c + \varepsilon < b$ y como $a < c < b$ entonces $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$
$\Phi_a \subset \Phi_{c-\varepsilon}, \Phi_{c+\varepsilon} \subset \Phi_b$ y $C_q(\Phi, u_0)$ ello sigue del capítulo 1, Teorema 4.2 de K. Chang [3] que $H_q(\Phi_{c+\varepsilon}, \Phi_{c-\varepsilon}) \neq 0$. Por otro lado como $H_q(\Phi_b, \Phi_a) = 0$, por el Lema 3.5 tenemos con uno o con otro $H_{q+1}(\Phi_b, \Phi_{c+\varepsilon}) \neq 0$ o $H_{q-1}(\Phi_{c-\varepsilon}, \Phi_a)$. Ahora por el Capítulo 1, existe $\varepsilon > 0$, tal que $H_q(\Phi_{c+\varepsilon}, \Phi_{c-\varepsilon}) \neq 0$, haciendo $c = 0$ y $q = 1$, entonces $H_1(\Phi_\varepsilon, \Phi_{-\varepsilon}) = C_1(\Phi, 0) \neq 0$. Por el Lema 3.4 para $a < -A$ tenemos $\Phi_a \simeq S^\infty$ entonces por el Teorema del isomorfismo de Hurewicz, ver E.Spanier [1]

$$H_q(E, \Phi_a) = H_q(E, S^\infty) = 0$$

entonces

$$H_1(E, \Phi_a) = H_1(E, S^\infty) = 0$$

Así por el Lema 3.5, se tiene

$$H_{1-1}(E, \Phi_\varepsilon) \neq 0 \text{ o } H_{1+1}(\Phi_{-\varepsilon}, \Phi_a) \neq 0$$

Lo que implica por el Teorema 3.2 que Φ tiene un punto crítico u no trivial para el cual satisface $\Phi(u) > \varepsilon$ o $-\varepsilon > \Phi(u) > a$. En consecuencia u es un punto crítico no cero de Φ y (3.1) tiene una solución no trivial. $\square$

Bibliografía

[1] Edwin Spanier Algebraic, Topology Springer-Verlag New York, 1994

[2] Kanishka Perera Critical groups of pairs of critical points produced by linking subsets J. Differential Equations, 140

[3] K. C. Chang. Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems. Birkauser Boston, 1993

[4] Jean-Noel Corvelle Morse Theory for continuos Funtionals Perpignan 1994

[5] J. Leray Topologie des espaces abstraits de M. Banach París 1935

[6] S. Kakutani Topolical properties of the unit sphere of the Hilbert Tokio 1943

[7] James Dugundi An extension of Tietze's Theorem. Pacific 1951

[8] Shibo Liu Existence of solution to a superlinear p-Laplacian equation. Beijing, 2001

[9] Jianquen Liu, Jiabao Su. Rewarks on Multiple Nontrivial solutions for Quasi-Linear Resonant Problems